

El arcoiris, la aplicación más hermosa de la trigonometría

Álvaro Valdés Menéndez,
Profesor de Matemáticas del I.E.S. Pérez de Ayala de Oviedo. (Asturias)

¿Quién no se ha quedado extasiado alguna vez mirando el arcoiris? ¿A quién no asombra ese conjunto de colores suspendido de la nada? ¿Cuántas leyendas hay sobre él?

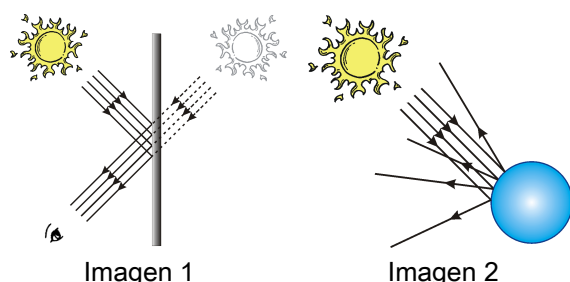
En este artículo vamos a hacer que esa "magia" persista en nosotros, pero de otra forma muy distinta, comprendiendo su origen, dejando que la Física y la Matemática subyacente nos iluminen con igual ilusión.

He preferido exponer este artículo planteando hipótesis y refutándolas, yendo lentamente hacia el resultado final, esperando hasta el último momento antes de exponer la terminología científica, deseando que así pueda ser usado en un aula, en casa o en cualquier otro lugar y con otras personas que deseen conocer más sobre este maravilloso fenómeno y tengan pavor a las ecuaciones.

Primeras observaciones

El origen del arcoiris es de "dominio público", se produce al reflejarse la luz en las gotas de agua. Pero, ¿es eso cierto? Aquello que todo el mundo dice, ¿es verdad?

Las dos imágenes que siguen a estas líneas muestran que no es tan simple.

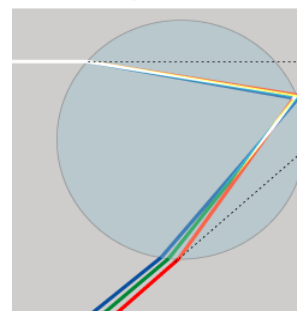


Si las gotas de lluvia "simplemente" reflejasen la luz, habría dos posibilidades: que se comportaran como una cortina (imagen 1) y por lo tanto, veríamos al Sol como reflejado en un espejo, o que cada gota reflejara la luz de forma individual (imagen 2). En este último caso, no se cumplirían **dos** de las características que se observan al ver un arcoiris:

- Sólo se observa cuando se mira con una dirección concreta, unos 40°
- No veríamos colores. La reflexión no descompone la luz en sus siete colores

Por tanto, debe de haber algo más. La respuesta es fácil, no sólo se produce reflexión, sino también **refracción**: el haz de luz debe entrar en la gota de agua. Con este cambio, ya explicamos la descomposición en colores de la luz: cada color se refracta de una forma distinta; al atravesar la superficie de la gota, se empieza a formar el arcoiris.

Pero aún más cosas tienen que haber. ¿Dónde debemos situarnos para ver el "arco de lluvia" que dicen los ingleses? Debemos estar de espaldas al Sol, cuando éste está bajo en el horizonte; si no, la luz del Sol nos cegaría y no veríamos nada. Así que la luz debe **reflejarse en el interior de la gota**:



De este modo, antes de salir hacia nuestros ojos, la luz ha sufrido dos refracciones y una reflexión.

La cuestión ahora es... al reflejarse la luz en el interior de la gota, ¿no se refracta y sale? La respuesta es afirmativa, pero también lo es si nos hacemos la pregunta inversa en el punto en que el rayo de sol toca a la gota y en el punto en el que el arcoiris sale de ella: en los tres puntos se producen los dos fenómenos, reflexión y refracción, y la "energía luminosa" se reparte entre los dos haces, el reflejado y el refractado. Así explicamos por qué lo que los franceses llaman el "arco en el cielo" es tan tenue, se ha dispersado mucha luz por el camino hacia nuestros ojos.

Avanzando un poco

Ya Aristóteles se dio cuenta de que la luz procedente del Sol se reflejaba en cada una de las gotitas bajo un ángulo fijo, formando superficies cónicas de luz. De cada uno de estos conos llega a nuestro ojo una sola de sus

generatrices. Esto tiene una implicación que podríamos llamar poética: a otro observador diferente le llegará luz de otras gotas y verá **otro arcoiris distinto**.

Intentemos deducir resultados y planteemos alguna ecuación. Empecemos por suponer que las gotas son esféricas. Esta suposición no está tan separada de la realidad como el conocido chiste sobre físicos, una gota de agua es tan pequeña y tiene una tensión superficial tan elevada que hasta tamaños bastante más grandes que los típicos de una gota de lluvia la forma es esencialmente esférica. Sólo el viento o lluvias torrenciales deforman las gotas, e impiden también la formación del arcoiris.

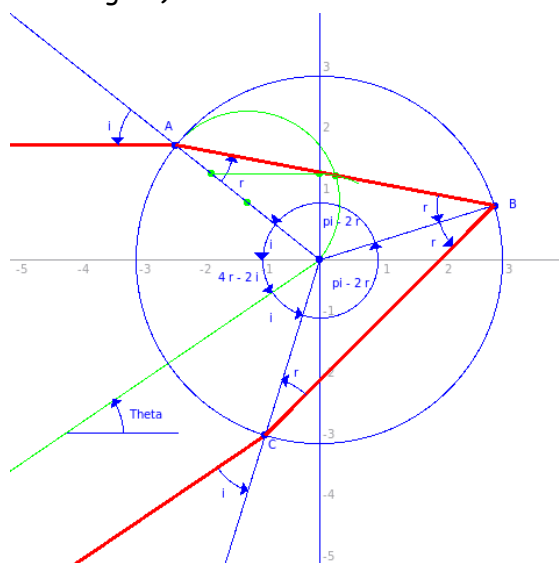
Supongamos que el rayo de Sol incide horizontalmente sobre la gota en un punto situado a unidades por encima del ecuador y, por simetría, analicemos el corte transversal de la misma de radio R . En 1667 Snell enunció la ley de la refracción por todos conocida:

$$n_{inc} \cdot \sin \vartheta_{inc} = n_{refr} \cdot \sin \vartheta_{refr}$$

siendo n_{inc} y n_{refr} los índices de refracción de los medios de incidencia y de refracción. Aplicada al haz incidente, y sabiendo que para la reflexión se verifica:

$$\vartheta_{inc} = \vartheta_{refr}$$

junto con el hecho geométrico de que los dos triángulos que se definen en el interior de la gota son isósceles (dos de sus lados son el radio de la gota):



nos permite deducir que, respecto a las normales a la circunferencia, el ángulo de salida es igual al ángulo de incidencia.

No obstante, a nosotros nos interesa el ángulo respecto a la horizontal, que vemos fácilmente que vale:

$$\Theta = 4\vartheta_{refl} - 2\vartheta_{inc}$$

Por trigonometría elemental,

$$\sin \vartheta_{inc} = \frac{a}{R}$$

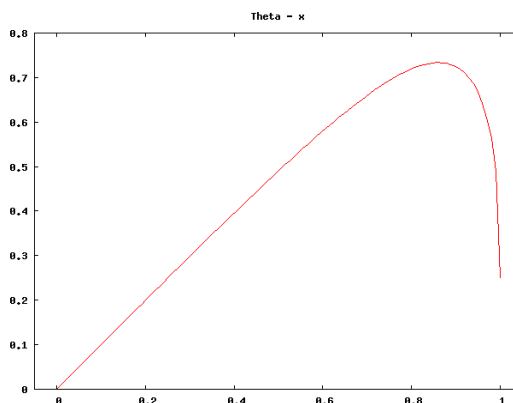
de la que, aplicando la ley de Snell haciendo $n_{aire}=1$, obtenemos:

$$\sin \vartheta_{inc} = \frac{a}{R} \quad \text{y} \quad \sin \vartheta_{refr} = \frac{a}{n \cdot R}$$

Hagamos, por comodidad $x = a/R$, y así:

$$\Theta = 4\arcsen \frac{x}{n} - 2\arcsen x$$

Usando el valor de $n_{agua} = 1.33$ obtenemos la siguiente representación gráfica:



Hay máximo sobre $x = 0.85$ (el radio vector del haz forma un ángulo de unos 58° con la horizontal). Esto significa que hay una acumulación de rayos saliendo de la gota en torno a este ángulo. Si retomamos la idea de gota esférica, y analizamos este corte transversal, hemos explicado el cono del que hablaba Arquímedes.

¿Y los colores?

Para obtener la gráfica anterior, hemos usado un valor $n_{agua} = 1.33$ para el índice de refracción de las gotas. Sin embargo, experimentalmente se ha comprobado que hay una pequeña influencia de la longitud de onda de la luz incidente, lo que hace que los máximos estén ligeramente desplazados de un color a otro. Es decir, cada color tiene su dirección preferente.

No obstante, cuando observamos algo sólo vemos aquello que ha reflejado (o emitido) un haz de luz hacia nuestros ojos. De este modo,

sólo vemos aquél haz de color que vaya directamente hacia nuestra pupila. Necesitamos **más de una gota** para ver un arcoiris.



Matemática avanzada

Ya hemos analizado cualitativamente y sin mucho esfuerzo matemático nuestro querido arco iris. Vayamos un poco más lejos, obtengamos analíticamente la posición del máximo:

Derivando la expresión de Θ

$$\Theta = 4\arcsen \frac{x}{n} - 2\arcsen x$$

obtenemos:

$$\Theta' = \frac{4n}{\sqrt{n^2 - x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

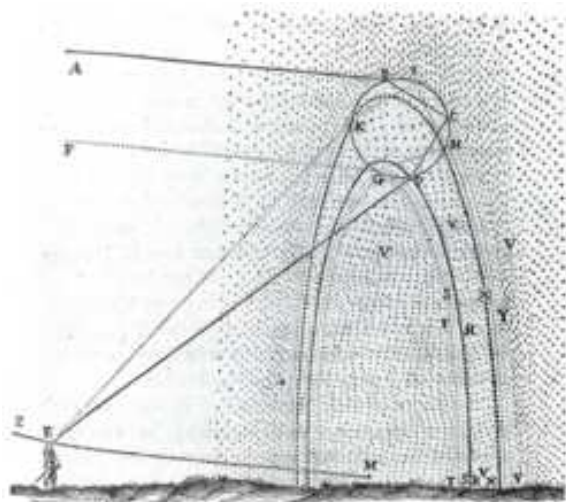
Igualamos a cero y resolvemos:

$$\Theta = \pm \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Con el valor promedio de $n_{\text{agua}} = 1.33$ obtenemos

$$\Theta = \pm 0.861$$

es decir, un ángulo de visión de 42.03° desde el suelo con simetría cónica, como bien muestra este boceto de Descartes:



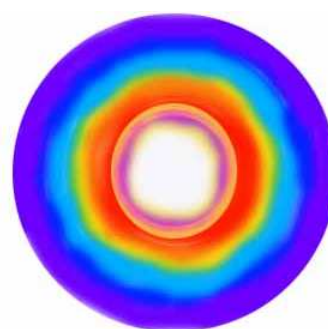
Si analizamos, por último, la ya citada influencia del color de la luz en la refracción, obtenemos experimentalmente que para la luz roja $n_{\text{agua}} = 1,332$, mientras que para la luz violeta $n_{\text{agua}} = 1,343$. De este modo,

$$\Theta_{\text{rojo}} = 42.22^\circ \quad \text{y} \quad \Theta_{\text{violeta}} = 40.65^\circ$$

o sea, una amplitud de más de grado y medio desde el color rojo (superior) hasta el violeta (inferior).

¿Y por qué es un arco?

De nuevo, en el boceto de Descartes tenemos la respuesta: El suelo nos impide ver el círculo completo. Desde lo alto de una montaña o desde un avión en vuelo podríamos ver un "círculoiris".



¿Y si analizamos las otras reflexiones internas?

Es perfectamente posible, y en ocasiones se observan, haces provenientes de otras reflexiones. Si recuperamos lo dicho anteriormente acerca de la pérdida de intensidad luminosa en cada reflexión/refracción, estos segundos arcos serán más tenues aún que los primeros. Rehaciendo los cálculos para la segunda reflexión se obtiene:

$$\Theta_{\text{rojo}} = 50.63^\circ \quad \text{y} \quad \Theta_{\text{violeta}} = 53.48^\circ$$

es decir, aparecen invertidos respecto al arco primario.

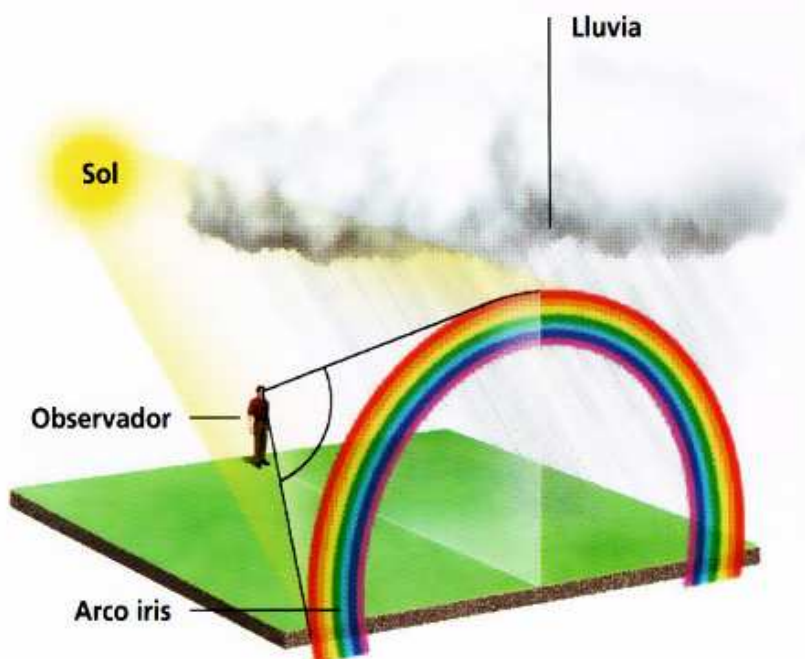
Debe notarse también que el arco secundario aparece casi 8 grados por encima del primario, lo que deja una zona que se aprecia más oscura y que recibe el nombre de **banda oscura de Alejandro de Afrodiasias**.

En ocasiones, y cuando los arco iris primario y secundario son muy intensos, parecen arcos menores entre los dos, y reciben el nombre de **arcos supernumerarios**, y son consecuencia de interferencias constructivas entre diversos haces en el interior de las gotas.

¿Y el caldero de oro?

De las definiciones y los cálculos hechos en el artículo, deducimos que si intentamos acercarnos a la cortina de lluvia, el arco iris irá disminuyendo paulatinamente hasta desaparecer cuando alcanzamos su base. Por este motivo no se puede nunca alcanzar esa cestita con monedas de oro que se encuentra en la base del arco iris, tal y como nos relata un cuento inglés.

Se cuenta la anécdota del pasajero de una avioneta que, viendo el arcoiris en el cielo, pidió al piloto que lo atravesara. Por desgracia para él, el arcoiris nunca fue aumentando hasta convertirse en una pared de colores, sino que simplemente se desvaneció; el avión se había acercado demasiado a la cortina de lluvia que generaba el arcoiris.



Para saber más:

1. http://es.wikipedia.org/wiki/Arco_iris
2. http://es.wikibooks.org/wiki/Física/Óptica/Teoría_completa_del_Arco_Iris
3. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/movimiento/arcoIris/arcoIris.xhtml>
4. http://www.fq.profes.net/archivo2.asp?id_contenido=35220

