

Determinación experimental de las características de vórtices anulares



Gerardo Ruiz Chavarría

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM. Circuito exterior, Ciudad Universitaria. 04510 México D.F., MEXICO.

E-mail: gruiz@servidor.unam.mx

(Recibido el 10 de Enero de 2010; aceptado el 23 de Octubre 2010)

Resumen

Los vórtices ocupan un lugar central en la dinámica de los fluidos, ya que están presentes en una gran variedad de flujos. Ejemplos de estos objetos son los torbellinos que se forman durante el vuelo de un avión, los ciclones que se forman en la atmósfera o a nivel planetario, la mancha roja de Júpiter. En este trabajo se presenta un estudio experimental de vórtices anulares, mostrando propiedades como el campo de velocidades, la distribución de vorticidad, la velocidad de traslación y las dimensiones geométricas. Los vórtices se producen al perturbar una pared de una cavidad llena de aire, que tiene un orificio circular. Se ha elegido trabajar con valores de número de Reynolds menores a 1000, en donde se tiene un régimen laminar y las medidas son reproducibles. Para medir el campo de velocidades se usó un sistema de anemometría de hilo caliente. Con el fin de colocar la sonda de hilo caliente en diferentes puntos se construyó un sistema de posicionamiento en dos dimensiones usando motores de paso que son controlados por medio del puerto paralelo de una computadora. Todas las medidas inician al momento de que se perturba la cavidad, por lo que se dispone de datos que permiten hacer una reconstrucción en el espacio y el tiempo de los vórtices. Los resultados muestran que la vorticidad se concentra en una región pequeña y que el campo de velocidades guarda semejanzas con el campo magnético producido por una espira circular.

Palabras clave: Vorticidad, dinámica de fluidos, automatización.

Abstract

Vortices have a central place in fluid dynamics since they are present in a wide variety of flows. Examples of these objects are the eddies produced during the flight of a plane, the cyclones that form in the atmosphere, or even the red spot of Jupiter. In this paper an experimental study of annular vortices is presented, showing properties as velocity field, vorticity distribution, travel speed and geometric dimensions. The vortices are produced by applying a perturbation in a wall of a cavity filled with air, which has a circular hole. The Reynolds number in all cases is lower than 1000 in order to guarantee a laminar regime and that the measurements are reproducible. The velocity is measured with a hot wire anemometer. To put the hot wire probe at various points a two dimensional positioning system was built using stepper motors that are controlled through a computer's parallel port. Data acquisition begins at the instant when the cavity is perturbed, so they are synchronized. This fact allows to have velocity both in space and time. The results show that vorticity concentrates in a small region and that velocity field exhibits similarities with the magnetic field produced by a circular coil.

Keywords: Vorticity, fluid dynamics, automatization.

PACS: 47.10.ad, 47.15.Tr, 47.32.cf

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La vorticidad es un concepto medular en la mecánica de fluidos, equiparable por ejemplo al de partículas elementales en la física nuclear. Se define formalmente como el rotacional del campo de velocidades y se puede interpretar como una medida de un giro local de un elemento de volumen. Pero más allá de lo anterior hay que entender a la vorticidad como una cantidad que está omnipresente en los fluidos que tenemos a nuestro alrededor. Los vórtices son

estructuras que existen en prácticamente cualquier escala., por ejemplo, los que se forman en el lavabo de nuestra casa, los huracanes o en escalas astronómicas las galaxias espirales. El siglo XX ha permitido conocer más acerca de ellos, a partir de experimentos en el laboratorio, observaciones en el océano y la atmósfera y por medio de simulaciones numéricas. A veces no se sabe donde y cuando va a formarse un vórtice, sin embargo si sabemos que estas estructuras van a aparecer durante el movimiento de líquidos y gases. En las últimas décadas las teorías de la

turbulencia se han construido teniendo a la vorticidad como un elemento central. A este respecto hay que recordar una frase escrita por L. Richardson en 1922 [1]:

“Los grandes remolinos dan lugar a otros más pequeños y estos a su vez a otros más pequeños y así hasta que entra en acción la viscosidad”.

De acuerdo a diferentes simulaciones numéricas y datos experimentales, existe una tendencia al estiramiento de vórtices. Esto ha llevado a la formulación de modelos en donde la vorticidad se concentra en hojas o incluso en filamentos con un diámetro comparable a la escala disipativa (es decir, donde la viscosidad se vuelve importante). Y en el intermedio se mencionan otras estructuras con dimensiones fractales.

En este trabajo vamos a mostrar varias de las ideas que se han expuesto en esta introducción. Para ello se ha diseñado un experimento donde se muestra la facilidad con la que se genera un vórtice, se dan detalles de sus características (diámetro, velocidad de desplazamiento, espesor de la región donde la vorticidad es distinta de cero, etc.) y del dispositivo experimental para medir la velocidad y la vorticidad. El trabajo se divide en las siguientes secciones: I) Introducción, II) Conceptos básicos de vórtices y la mecánica de los fluidos III) Dispositivo experimental, donde se describe la cavidad que se utiliza para producir los vórtices anulares y la manera como se perturba. Además se hace una descripción de un sistema de posicionamiento que se ocupó para colocar a la sonda de velocidad en diferentes puntos de un plano. Y se dan finalmente detalles de la adquisición de los datos y su posterior procesamiento, IV) Principio de funcionamiento del anemómetro de hilo caliente, V) Resultados, en donde se presentan gráficas del campo de velocidad y de la vorticidad. Se muestra que la vorticidad está concentrada en un toro delgado (en comparación con el diámetro del anillo), lo que ilustra claramente el fenómeno de estiramiento de la vorticidad. Se hace una comparación con un fenómeno magnético, el campo producido por una espira circular, habida cuenta que en ambos casos las ecuaciones que los describen son las mismas. VI) Conclusiones.

II. CONCEPTOS BASICOS

La mecánica de fluidos se basa en los principios de conservación de la masa, de la energía y en las leyes de la mecánica clásica. De la conservación de la masa se deduce la ecuación de continuidad, mientras que de la segunda ley de Newton se deduce la ecuación de Navier-Stokes. Esta última es no lineal, lo que dificulta el cálculo de soluciones. De hecho solo se pueden obtener analíticamente algunas soluciones en geometrías sencillas, donde los términos no lineales se anulan o se desprecian (por ejemplo, el flujo en un tubo, el flujo entre dos placas paralelas).

El movimiento de líquidos y gases lo tenemos presente en todo momento pues el océano y la atmósfera son dos sistemas constituidos respectivamente por agua y una mezcla de nitrógeno, oxígeno y otros gases.

En estos sistemas se observan estructuras donde ocurre el giro del fluido, por ejemplo, los tornados. Para describir este comportamiento se introduce el concepto de vorticidad, que se define como:

$$\vec{\omega} = \text{rot} \vec{u}. \quad (1)$$

Si la vorticidad es diferente de cero, entonces el sistema presenta giros, sin embargo lo contrario no es cierto. Por ejemplo si en sistema la velocidad angular decrece como $1/r$ la vorticidad es cero.

Asociado a la vorticidad tenemos otro concepto, el de circulación, que se define como:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}. \quad (2)$$

De acuerdo al teorema de Kelvin, que expresa la conservación del momento angular, la circulación se conserva si se cumplen tres condiciones: a) Las fuerzas de cuerpo son potenciales, por ejemplo, es el caso de la gravedad, b) La viscosidad no juega un papel importante, lo que se cumple lejos de paredes sólidas y c) las líneas de densidad constante son paralelas a las líneas de presión constante. Por el contrario, para la creación de vorticidad se requiere que no se cumpla alguna o varias de las condiciones establecidas anteriormente. En laboratorio la forma más sencilla de producir vorticidad es haciendo pasar una corriente de fluido en la vecindad de un cuerpo sólido. Por ejemplo, si se coloca un cilindro dentro de una corriente de aire o agua, es posible la formación de un par de vórtices delante del cilindro, o bien el desprendimiento alternado de vórtices de signos opuestos [2]. Todo esto dependiendo del número de Reynolds. En este caso se trata de vórtices cuyo núcleo es un tubo delgado, caracterizado porque la velocidad en su interior es proporcional a la distancia al centro. En el exterior la velocidad decae aproximadamente como $1/r$, que es un caso de movimiento de rotación, pero con vorticidad igual a cero. En el océano o la atmósfera hay creación de vorticidad en presencia de fuerzas que no se derivan de un potencial, por ejemplo, la Coriolis o cuando las líneas de densidad constante no coinciden con las líneas de presión constante. Estos factores son los que producen por ejemplo los huracanes.

A pesar de la no linealidad de la ecuación de Navier-Stokes, es posible establecer una correspondencia con fenómenos que ocurren en el electromagnetismo [2]. Recordemos dos de las ecuaciones de Maxwell y supóngase que no hay dependencia con respecto al tiempo:

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (4)$$

La primera de estas ecuaciones es la expresión matemática de que no existen monopolos magnéticos, o dicho de otra manera, que las líneas de campo son cerradas. La segunda ecuación se deduce a partir de la conocida Ley de Biot-Savart para el cálculo del campo B.

En un flujo incompresible y rotacional se cumplen por su parte las siguientes relaciones:

$$\text{div} \vec{u} = 0, \quad (5)$$

$$\text{rot} \vec{u} = \vec{\omega}. \quad (6)$$

La correspondencia ocurre si la vorticidad tiene una distribución semejante a la del vector de densidad de corriente J . Esto sucede por ejemplo en los vórtices de la calle de Von Karman (flujo alrededor de un cilindro) o en los vórtices anulares. En el primer hay una equivalencia entre el campo magnético producido por un alambre recto y en el segundo caso la equivalencia es con el campo magnético producido por una espira circular. En particular el campo de velocidades se puede calcular a partir de la vorticidad usando la ley de Biot-Salvarte:

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \iint \frac{d\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}. \quad (7)$$

De esta ecuación se puede calcular analíticamente la velocidad sobre el eje de simetría del anillo, lo que resulta en la siguiente expresión:

$$u_z = \frac{\Gamma}{2a} \frac{a^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

en donde a es el radio del anillo.

III. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

Una forma sencilla de construir una cavidad para producir vórtices anulares es usando una bocina [3, 4]. A esta se le coloca por la parte de enfrente un disco compacto, el que ya tiene un orificio central circular de 1.2 cm de diámetro. La bocina se perturba enviando un pulso que ha sido producido por un generador de funciones –en la modalidad de función de onda arbitraria. Se ha utilizado un generador de funciones marca Stanford Research System, modelo DS345, que se ha programado por el puerto serial para producir una función que crece rápidamente en el tiempo, hasta llegar a un valor constante. Una foto de esta cavidad se muestra en la figura 1, donde se observa como un anillo de humo sale por la parte de enfrente. Para hacer esta visualización se ha inyectado humo de cigarro al interior de la cavidad. Como se puede observar, el anillo es más ancho en la parte de abajo. Esto se debe a que el humo se ha enfriado y es más denso que el aire circundante, por lo que tiende a ir hacia abajo. En el caso de que no haya humo los vórtices son simétricos.

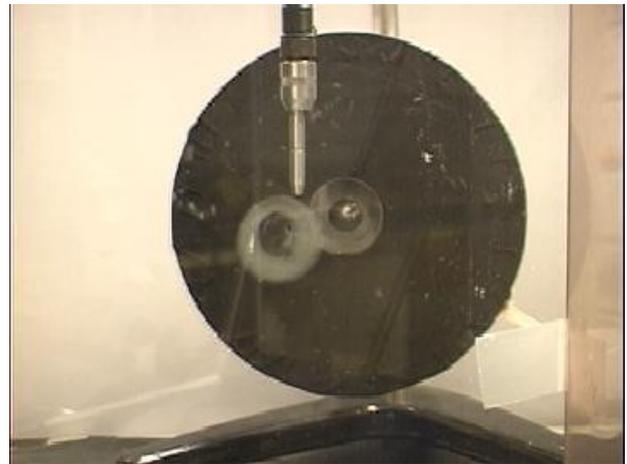


FIGURA 1. Cavidad donde se generan los vórtices anulares. Está formada por una bocina (que se encuentra en la parte trasera) y en la parte de enfrente se ha cerrado poniendo un disco compacto. En la figura se observa un anillo que se ha visualizado con humo.

Para determinar el campo de velocidades es necesario hacer mediciones simultáneas en un conjunto de puntos en el espacio y este proceso repetirlo en diferentes instantes de tiempo. En un flujo cualquiera esto significa que hay que tener una malla tridimensional y un aparato de medida que pueda determinar la velocidad en todos los puntos de esa malla. Sin embargo para el sistema que se está considerando hay simetría axial por lo que solo se requiere medir 2 componentes de velocidad en un plano. Con las técnicas actuales esto se puede lograr con un equipo de velocimetría por imágenes de partículas (PIV por sus siglas en inglés). Sin embargo, su costo es alto por lo que es preferible recurrir a otras técnicas de medida. Una alternativa es la anemometría de hilo caliente, que si bien mide una o varias componentes de la velocidad en un punto, nos permite tener el campo de velocidades completo dado que el fenómeno es reproducible, es decir, las características del vórtice se conservan sin modificación entre una realización y otra. El principio de reconstrucción del campo de velocidades es el siguiente: todas las medidas de velocidad inician en el momento en que la bocina es perturbada con la señal que le envía el generador de funciones. Esto se logra enviando un pulso digital a la interfase de adquisición de datos para indicar que inicie la toma de datos. Otro ingrediente necesario consiste en colocar la sonda de velocidad en distintos puntos sobre un plano. Para ello se ha construido un sistema de posicionamiento en dos dimensiones. Para desplazar el carro donde va montada la sonda se utilizan dos motores de paso que se alimentan hasta con una potencia de 10 watts ($V_{\text{max}}=36$ V, $I_{\text{max}}=0.3$ A). Los motores dan un total de 96 pasos/vuelta, lo que permite hacer desplazamientos menores de decimas de milímetro. En cada dimensión hay dos barras cilíndricas de aluminio, que son las encargadas de mantener la dirección de desplazamiento y hay un tornillo sin fin que está unido al motor de pasos. Se han usado dos distintos tornillos sin fin, con el objeto de comparar su funcionamiento. Uno de ellos nos permite tener

un desplazamiento de 59 paso/milímetro, mientras que el otro da 116 paso/milímetro.

Los desplazamientos máximos que se tienen en el sistema de posicionamiento son 17 cm en una dirección y 12 cm en la otra. Esto es suficiente para el experimento, ya que se han tomado datos en un cuadrado de 60 mm x 60 mm. La sonda se coloca se coloca en puntos de una malla cuya distancia entre puntos subsecuentes es de 1 mm en ciertos casos y de 2 mm en otros.

El movimiento de los motores de paso es controlado por un dispositivo electrónico cuya componente medular es el circuito integrado ULN2003. Por un lado se envían pulsos por medio del puerto paralelo de una computadora, sin embargo estos no se envían directamente al motor dado que son de baja potencia (5 V y 20 mA, dando una potencia de 100 mW). Se ha intercalado un circuito integrado ULN2003, cuya función es aumentar la potencia del pulso que se envía a las bobinas del motor. Además se incluye un diodo como medida de protección, evitando el paso de corrientes inversas que pueden dañar el puerto paralelo.

Para el registro de los datos se ha utilizado una tarjeta de adquisición de datos NI USB-6009, que permite registrar datos simultáneamente hasta por 4 canales, la frecuencia máxima de adquisición es de 48 KHz, que es más que suficiente para el experimento que se describe en este trabajo. La tarjeta es de 14 bits, lo que significa que si se trabaja con señales en el intervalo de [-10V, 10V], la resolución es de 1.22 mV. Es posible sincronizar el inicio de la toma de datos con algún evento pues el dispositivo cuenta con una entrada llamada PFI0. Su función es iniciar el muestreo de datos cuando se le envía un pulso digital (una señal de 5 volts). Esto es útil ya que en nuestro experimento se requiere que la perturbación enviada a la cavidad coincida con el registro de la velocidad.

IV.- PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DEL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE

La anemometría de hilo caliente es un procedimiento de medición de velocidad en fluidos que se ha utilizado desde mediados del siglo XX, en parte debido a la resolución espacial y temporal que presenta. El principio de operación es el efecto refrigerante que produce sobre un alambre que tiene una temperatura superior a la del fluido circundante. En el aire se sugiere que las sondas de hilo caliente operen entre 200 y 300 grados centígrados, mientras que en líquidos la temperatura de operación debe ser inferior a la temperatura de fusión a fin evitar que haya transiciones de fase que pueden afectar seriamente la medida. Cuando pasa una corriente de fluido, se produce un intercambio de calor entre este y la sonda. La cantidad de calor intercambiado depende de la velocidad del fluido. Esto produciría una disminución en la temperatura de la sonda, sin embargo se hace una retroalimentación de manera que la temperatura no baje, lo que se logra con un incremento en la potencia con que se alimenta a la sonda. Las sondas de hilo caliente se fabrican de platino o de tungsteno, o de aleaciones entre

ellas. Estos materiales tienen la característica de que su resistencia es proporcional a la temperatura. Por otra parte, las dimensiones típicas de una sonda de hilo caliente son diámetros de 5 μm y longitudes de 0,25 a 2 mm. Existe una variante, son las sondas de película caliente que son precisamente películas delgadas que se depositan en un sustrato cilíndrico. Para este caso, las longitudes son semejantes a las sondas de hilo caliente, mientras que los diámetros típicos son de 40-60 μm .

En este experimento se ha usado un anemómetro de hilo caliente marca TSI, modelo IFA 300. Este dispositivo no proporciona directamente la velocidad, sino un voltaje que está relacionado con esta. En principio la relación entre voltaje (E) y velocidad (v) está dado por la siguiente relación:

$$E^2 = a + bv^{1/2}. \quad (9)$$

Para conocer las constantes a y b hay que hacer una calibración. Esta se realiza en un túnel de viento cuyas velocidades de trabajo están en el intervalo [0,4] m/s. Los datos experimentales se muestran en la figura 4, en donde se grafica en el eje de las abscisas la raíz cuadrada de la velocidad y en el eje de las ordenadas el cuadrado del voltaje. Como se puede apreciar los datos se distribuyen alrededor de una línea recta. Mediante un ajuste por mínimos cuadrados se obtiene que $a=1.221$ y $b=0.7185$. Estos datos se ingresan al programa que toma adquiere las señales que salen del anemómetro y posiciona a la sonda en los puntos de la malla.

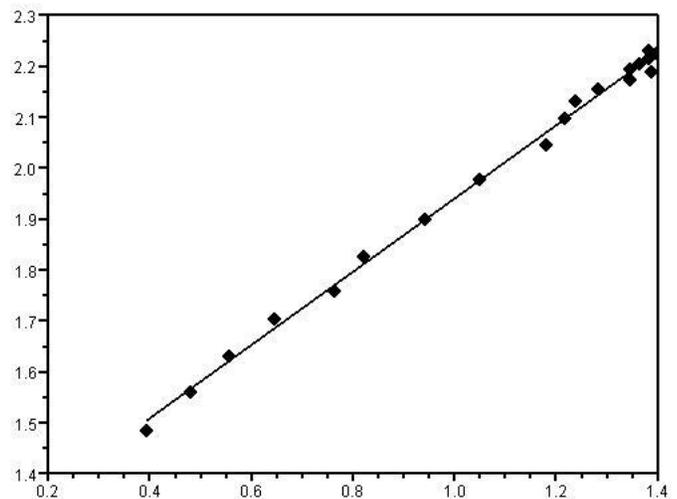


FIGURA 2. Datos de calibración de la sonda de hilo caliente. Se grafica E^2 vs $v^{1/2}$. Los datos se distribuyen alrededor de una línea recta. Las constantes de ajuste son $a=1.221$ y $b=0.7185$. Se usó un túnel de viento de sección transversal de 15 cm x 15 cm para obtener los datos de calibración.

V.- RESULTADOS

Se ha medido una componente de velocidad en diferentes puntos de un plano y a diferentes tiempos. La distancia entre puntos contiguos es de 1 mm, mientras que el paso de tiempo es de 1 milésima de segundo. Con esta información se puede hacer una reconstrucción completa del campo de velocidades, habida cuenta de la simetría del sistema. Si usamos un sistema de coordenadas cilíndricas donde el eje z coincide con el eje de simetría de los vórtices anulares, entonces solo dos componentes del campo de velocidades son diferentes de cero, a saber, u_r y u_z . En el experimento lo que se ha medido es u_z . La otra componente de velocidad se puede calcular utilizando la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

En donde se aproxima la derivada con respecto a r con un cociente de diferencias y se tiene en cuenta que la componente radial de la velocidad tiende a cero lejos del anillo.

La gráfica del campo de velocidades en un plano $\theta=0$ constante se muestra en la figura 3. En ella se observan claramente dos cortes del anillo con el plano. Como es de esperarse el sentido de giro es diferente en cada lado.

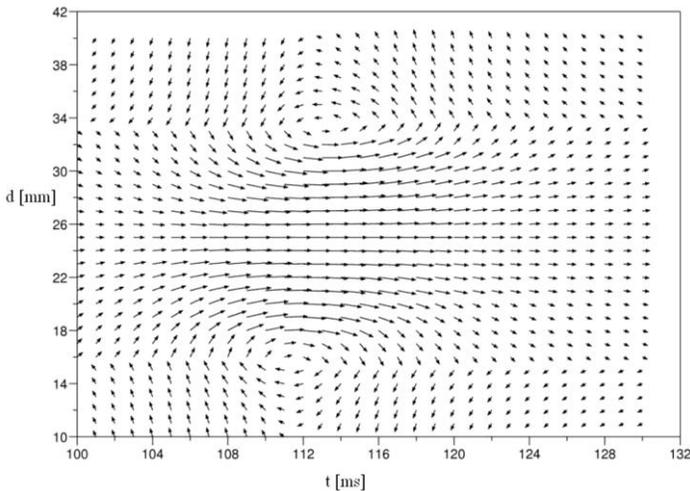


FIGURA 3. Campo de velocidades del vórtice anular en el plano $\theta=0$. Se grafican las componentes u_r y u_z . Para obtener la componente radial del campo de velocidades se ha recurrido a la ecuación de continuidad. Se observan dos cortes del anillo.

Se ha hablado de una semejanza entre la teoría electromagnética y la dinámica de fluidos. En nuestro caso hay una correspondencia entre el campo magnético producido por una espira y el campo de velocidades del anillo de vorticidad. El único resultado analítico es la expresión para la componente u_z sobre el eje de simetría:

$$u_z = \frac{\Gamma}{2a} \frac{a^3}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

En donde a es el radio del vórtice y Γ es la circulación. En la figura 4 se muestra una gráfica de u_z en función de z , en donde el origen se ha puesto en el centro del anillo. Para comparar se grafica también la fórmula dada previamente. Se puede apreciar que los datos experimentales se ajustan a la predicción teórica en la vecindad de $z=0$. A ambos lados de la curva la concordancia ya no es tan buena, lo que refleja el hecho de que hay dificultad para medir la velocidad cuando esta toma valores pequeños. Para velocidades pequeñas el calentamiento que provoca la sonda, da lugar a corrientes de convección, por lo que la relación propuesta entre voltaje y velocidad deja de ser válida. Esto se puede apreciar por el hecho de que nunca se alcanza el valor de velocidad cero, incluso cuando no hay movimiento.

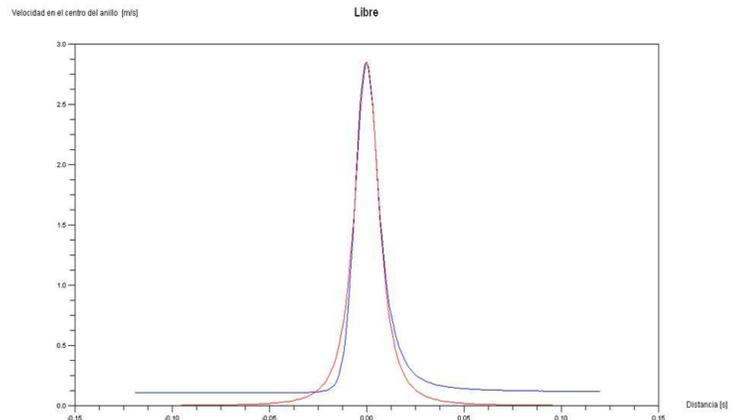


FIGURA 4. Gráfica de campo de velocidades en el eje de simetría del vórtice anular. Se ha graficado u_z vs z . En la gráfica se ha incluido la curva teórica que resulta de hacer la integración de la ley de Biot-Savart. La concordancia es buena en el centro.

Otro resultado importante se muestra en la figura 5, donde se ha graficado la velocidad u_z en función de la coordenada radial. En esta gráfica se observan claramente dos regiones. Lejos del centro el campo de velocidades es aproximadamente proporcional a $1/r$. Por otra parte hay una región donde hay una marcada variación de la velocidad, que sigue aproximadamente una dependencia lineal con r . La primera región es una zona con vorticidad nula, mientras que en la segunda región la vorticidad es claramente diferente de cero. Finalmente, cerca del centro la velocidad es prácticamente constante y también hay la vorticidad es cero. Lo anterior nos muestra que el anillo tiene un núcleo con vorticidad aproximadamente constante y es una prueba de lo que diversos autores refieren como el fenómeno de estiramiento de vorticidad, que es consustancial a la ecuación de Navier-Stokes.

A partir de la gráfica 5 se pueden calcular dos cantidades geométricas, una es el diámetro del vórtice anular y la

segunda es el diámetro de núcleo de vórtice. Para la primera el valor es de 15 mm, mientras que para el segundo el valor es de 3 mm. Nótese que en el núcleo a una variación de alrededor de 3m/s en la velocidad en una distancia de 3 mm.

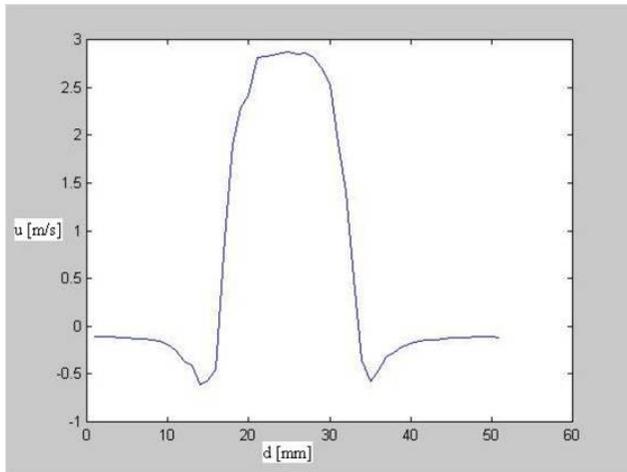


FIGURA 5. Gráfica de componente de velocidad u_z en función de r sobre una línea que coincide con un diámetro del anillo. Se observa un crecimiento de la velocidad de valores negativos hasta casi 3 m/s sobre una distancia de 3 mm. Ahí se encuentra el núcleo del vórtice. Fuera de esa zona el flujo es irrotacional.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha obtenido experimentalmente el campo de velocidades de un anillo de vorticidad que se ha generado en el laboratorio. Se ha medido una sola componente de la velocidad, sin embargo con el uso de la ecuación de continuidad ha sido posible calcular la componente radial. Y con ello se tiene ya información completa sobre sus características. Se pueden determinar el radio de vórtice anular, el tamaño del núcleo y se puede calcular la vorticidad.

Los resultados indican que la vorticidad está concentrada en una región pequeña, en donde se presentan variaciones grandes de velocidad. Esto es una evidencia de las teorías actuales de la dinámica de fluidos, y en particular de la turbulencia, en donde se habla del fenómeno de estiramiento de vórtices.

Se ha mostrado también que hay una semejanza con la teoría electromagnética. Se ha mostrado la equivalencia entre el campo de velocidades en y alrededor del anillo de vorticidad y el campo magnético producido por una espira circular.

Debemos resaltar finalmente que los resultados de este experimento pueden ser útiles para explicar en cursos de mecánica de fluidos los conceptos de vorticidad, estiramiento de vórtices y poner en claro las ideas que subyacen en alguna teorías contemporáneas de la turbulencia.

AGRADECIMIENTOS

Se extiende un reconocimiento a Alvaro Francisco Vázquez de Gyves y Tania Santiago Arce, quienes participaron en distintos momentos en el montaje de los experimentos descritos en el presente trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Frisch, U., *Turbulence, the legacy of Kolmogorov*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), p. 296.
- [2] Guyon, E., Hulin, J. P. and Petit, L., *Hydrodynamique Physique*, (EDP Sciences, Paris, 2001), p. 678.
- [3] Vázquez de Gyves, A. F., *Impacto simétrico de un anillo de vorticidad con una pared*. Tesis de licenciatura, (UNAM, México, 2007).
- [4] Santiago Arce, T., *Impacto asimétrico de un anillo de vorticidad con una pared*. Tesis de licenciatura, (UNAM, México, 2006).