LA TIERRA:
UN PLANETA CON MARES Y ATMÓSFERA

Antonio Córdoba y Diego Córdoba

1.3

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Este capítulo introduce algunos problemas, actuales e históricos, de la mecánica de fluidos de manera bien ejemplificada y documentada. La redacción, junto con la precisión en los términos y conceptos, están muy cuidadas y la elección de gráficas e imágenes es oportuna y acertada.

Como introducción se presenta al lector la predicción del tiempo atmosférico y los movimientos del mar como objetivos de la mente humana. La mecánica de fluidos se presenta como un campo que atañe a tres estados de la materia (líquido, gas y plasma) y por esta razón, sus fines, problemas y proyectos son tan variados como las situaciones en las que interviene un fluido, que pueden depender de la temperatura, la gravedad o la presencia de campos magnéticos. Se destacan también aspectos históricos y culturales, extraídos de los trabajos y antecedentes históricos de autores como Arquímedes, Pascal; Bernouilli, Lagrange, Euler (cálculo diferencial, ecuaciones de los fluidos); Navier y Stokes (viscosidad).

El método interrogativo seguido por los autores proporciona interés a la lectura del capítulo con las cuestiones elegidas. Gotas: ¿por qué son las gotas esféricas? Olas: ¿qué son las olas? Medios porosos: ¿cómo cambia la dinámica de un fluido en un medio poroso? ¿cómo se produce la aparición, o en su contrario ausencia, de singularidades en la evolución de un fluido? En todas estas cuestiones se muestra y ejemplifica la utilidad de las matemáticas para entender los fenómenos planteados.

El texto se ubica entre el análisis matemático, las simulaciones numéricas y la física de los medios continuos. Su lectura se puede seguir desde un cierto nivel de conocimiento matemático, sobre todo en su primera parte. La comprensión de la segunda parte, singularmente la formulación analítica de conceptos y de las leyes que se derivan, supera el nivel de conocimiento de los estudiantes de bachillerato; para su comprensión sería necesaria una preparación matemática más completa y específica sobre las técnicas y conceptos matemáticos en que se basan los modelos que se presentan.

Por otro lado, los conceptos y procedimientos que se plantean resultan muy adecuados para la asignatura Ciencias de la Tierra y Medioambientales. Singularmente, el capítulo resulta especialmente oportuno para introducir y desarrollar algunas de las ideas y conceptos presentados en el segundo contenido de la asignatura:

C2. Los sistemas fluidos externos y su dinámica.

- La atmósfera: estructura y composición. Actividad reguladora y protectora. Inversiones térmicas. Recursos energéticos relacionados con la atmósfera. Contaminación atmosférica: detección, prevención y corrección. El agujero de la capa de ozono. Aumento del efecto invernadero. El cambio climático global.
- La hidrosfera. Masas de agua. El balance hídrico y el ciclo del agua. Recursos hídricos: usos, explotación e impactos. La contaminación hídrica: detección, prevención y corrección de aguas contaminadas. Determinación en muestras de agua de algunos parámetros químicos y biológicos e interpretación de los resultados en función de su uso.

También la lectura y el trabajo de este capítulo responden a los objetivos de la asignatura Ciencias para el Mundo Contemporáneo.

LA MECÁNICA DE FLUIDOS

La presencia de una atmósfera rica en oxígeno y de abundante agua en los océanos es una característica fundamental para la vida en el planeta Tierra. Predecir el tiempo atmosférico, comprender la naturaleza de los vientos, desde los amables céfiros hasta los devastadores tornados y huracanes, y entender la naturaleza de los movimientos del mar, olas, mareas y **corrientes**, han sido desde siempre objetivos que la mente humana, tanto por razones de supervivencia como por curiosidad científica, se ha dedicado a explorar y conocer.

El resultado de ese empeño es la mecánica de fluidos, un campo excepcionalmente amplio que atañe a tres estados de la materia (líquido, gas y plasma) cuyos fines, problemas y proyectos son tan variados como innumerables son las situaciones físicas en las que interviene un fluido, desarrollando dinámicas que pueden depender de factores tales como la temperatura, la gravedad o la presencia de campos magnéticos en el caso particular de los plasmas.

Figura 1. Líquido (agua). Fotografía: Antonio Córdoba.

El estudio de los fluidos se encuentra en la interfaz entre el análisis matemático, las simulaciones numéricas y la física de los medios continuos, y tiene una larga historia con momentos estelares como el descubrimiento por Arquímedes de su famoso principio ("todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un impulso vertical que es igual al peso del fluido desalojado"), base de la flotación y con el que pudo determinar la composición de la corona del rey Herón de Siracusa. Este descubrimiento le provocó tanto entusiasmo que salió desnudo por las calles gritando "Eureka" (lo conseguí), según reza esa leyenda del legado científico del gran periodo alejandrino que forma ya parte importante de nuestra cultura. Algunos siglos después, ya en pleno barroco, Blaise Pascal formuló el importante concepto de **presión** estableciendo una buena base teórica para la hidrostática, con sus consecuencias prácticas en las prensas hidráulicas.

Figura 2. Los primeros estudios de dinámica de fluidos fueron protagonizados por Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) y Blaise Pascal (1623-1662). Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes_bath.jpg.

Figura 3: Blaise Pascal (1623-1662). Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pascal-old.png.

Siguiendo en el tiempo nos encontramos con la contribución fundamental de los ilustrados, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange y Leonhard Euler, quienes, haciendo uso del magnífico instrumento del cálculo diferencial, derivaron las ecuaciones fundamentales de los fluidos en movimiento. Proeza que fue luego completada con el añadido de los términos de **viscosidad** por Navier y Stokes, ya en pleno romanticismo.

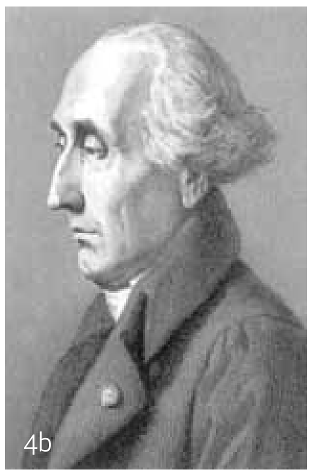


Figura 4a. Daniel Bernoulli (1700-1782). Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Daniel_Bernoulli_001.jpg.

Figura 4b. Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph-Louis_Lagrange.jpeg.

Figura 4c. Retrato de Leonhard Euler (1707-1783). Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/Leonhard_Euler.

A pesar de la importancia práctica de sus problemas y de los esfuerzos de muchos grandes matemáticos durante varios siglos, quedan todavía algunas cuestiones fundamentales en la mecánica de fluidos que esperan respuesta.

La hidrodinámica es un campo inmenso de interés para los matemáticos, pero también para los físicos, los ingenieros y los meteorólogos. En muchos fenómenos de la naturaleza se han originado modelos o sistemas de ecuaciones que atañen a los fluidos y que, de alguna manera, se derivan de las leyes fundamentales que veremos a lo largo del capítulo.

La labor de los matemáticos consiste en estudiar estos modelos, demostrar su consistencia lógica (es decir, que están bien propuestos), y sacar las consecuencias en forma de teoremas y predicciones del comportamiento de sus soluciones. He aquí una pequeña muestra de fenómenos que se pueden observar a través de la potente lente de las matemáticas.

FRENTES DE AIRE FRÍO Y AIRE CALIENTE

De las ecuaciones de Navier-Stokes, a las que dedicaremos gran parte del capítulo, se deducen ecuaciones que sirven para construir modelos de evolución de los frentes atmosféricos. Son las ecuaciones quasi-geostróficas (Q.G.) derivadas de las anteriores para el caso de un fluido en movimiento de rotación (sobre la superficie de la Tierra), cuando se tienen en cuenta algunas aproximaciones razonables en latitudes medias al efecto de la rotación terrestre y la aceleración de Coriolis.

En la versión de superficie (S.Q.G.) se reducen a ecuaciones en dos variables espaciales que son las que sirven para modelar la evolución de frentes atmosféricos, pero que presentan muchas de las dificultades del modelo tridimensional de Navier-Stokes, especialmente el hecho de que el campo de velocidades venga descrito por unos operadores de naturaleza no-local (R transformadas de Riesz), como le ocurre a la presión en (N.S.).

TORBELLINOS

A menudo los fluidos desarrollan estructuras en forma de torbellinos, también conocidos como vórtices, que son capaces de concentrar una gran cantidad de energía en una región pequeña del espacio, y que poseen una gran capacidad destructiva. Estos vórtices pueden subsistir por largos periodos de tiempo y desplazarse en el espacio, como hacen los huracanes y los tornados. Estudiar la evolución de estas soluciones de las ecuaciones de los fluidos y demostrar matemáticamente sus propiedades es una tarea muy interesante.

GOTAS

¿Por qué son las gotas esféricas? La razón está en la tendencia de su superficie a ocupar la mínima área posible, y da lugar a fenómenos muy interesantes de cambio de topología. Un ejemplo es un chorro de agua que rompe en un conjunto de puntos desconectados entre sí, dando lugar a gotas. Pero también resulta interesante el fenómeno contrario (por ejemplo, el chapapote), cuando un líquido viscoso dentro de otro que lo sea menos, puede desarrollar filamentos que llegan casi al tamaño molecular.

ONDAS: OLAS

¿Qué son las olas? Se trata de soluciones en forma de onda para las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes, que veremos a continuación, análogas a las soluciones en forma de onda para el electromagnetismo (ondas de radio o de televisión). Estas ondas pueden tener longitudes del orden de centímetros –como son las llamadas capilares–,o tener longitudes kilométricas –como los devastadores *tsunamis*–. Pueden también aparecer, bajo ciertas circunstancias, en algunos tipos de nubes. Todas ellas presentan problemas matemáticos que son fascinantes y nos interesa investigar.

MEDIOS POROSOS

¿Cómo cambia la dinámica de un fluido en un medio poroso? ¿Cómo se mueven las aguas subterráneas? El ingeniero Henry Darcy, en 1856, dedujo de forma experimental que el fluido se rige por lo que hoy en día se conoce como la ley de Darcy

$$\frac{V}{\kappa}\upsilon = -\nabla p - (0, g\rho)$$

donde la velocidad v (incompresible) y la presión p dependen de la viscosidad V, la permeabilidad K del medio isotrópico, la densidad p del fluido y la aceleración de la gravedad g. Pero se trata de una velocidad promedio, en la escala mesoscópica que corresponde a los poros, de la de las partículas fluidas que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes. Los problemas matemáticos que surgen en esta dirección tienen un interés industrial en actividades como la extracción de petróleo o la distribución de aguas subterráneas.

UN PROBLEMA DEL MILENIO

En este capítulo abordaremos una de las cuestiones fundamentales de la mecánica de fluidos que aún está abierta, relativa a las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes. El Instituto Clay, un centro de investigación matemática de financiación privada estadounidense, la ha señalado como uno de los problemas del milenio y ha ofrecido el premio de un millón de dólares por su solución (http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/).

Se trata de la aparición, o por el contrario ausencia, de singularidades en la evolución de un fluido –según las ecuaciones de Navier-Stokes–, cuando se parte de un estado inicial que carece de ellas. Además de ser una cuestión de principios para todo modelo de evolución, se trata de una pregunta fundamental en el empeño de entender las matemáticas de la turbulencia. Lo que

Figura 5 a. C. Navier (1785-1836). Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Claude- Louis_Navier.jpg.
Figura 5 b. George Gabriel Stokes, 1875. Fuente: Popular Science Monthly Volume 7.

sigue a continuación es un intento de transmitir la naturaleza y el interés que tiene ese problema del milenio.

El agua y el aire son fluidos fundamentales de la naturaleza realmente inspiradores para entender el modelo matemático del medio continuo. Un concepto fundamental es el de partícula fluida, que no debemos asociar sin más a las nociones de átomo o molécula, a los que la ciencia nos tiene ahora bastante acostumbrados pero que, con permiso de Leucipo y Demócrito, son conceptos posteriores al de partícula fluida introducida por los matemáticos de la Ilustración. Pensemos en la circulación nocturna de los coches por las autovías que concurren a una gran ciudad después de las vacaciones. Vistos desde una cierta altura, con sus luces rojas en la retaguardia, o los faros frontales de luz blanca, parecen partículas luminosas que se mueven de forma más o menos ordenada, aunque a veces sea algo caótica y accidentada, y forman perfectamente un fluido que discurre por cauces que se unen y bifurcan, entrando o saliendo de ese gran contenedor de automóviles que es la ciudad.

Podemos obtener otra metáfora fluida interesante en la salida de un estadio de fútbol, observando la escena desde un edificio suficientemente alto de la proximidad. Visto desde la lejanía se trata de un flujo de personas, partículas fluidas cuyas trayectorias individuales convergen o divergen, dando lugar a aglomeraciones y rarificaciones en las que varían la densidad y la presión.

EL MEDIO CONTINUO

Según Aristóteles, "El continuo puede ser definido como aquello que es divisible en partes que, a su vez, pueden ser divididas, y así hasta el infinito".

No es una mala aproximación, teniendo además en cuenta las dificultades de los griegos para superar el descubrimiento pitagórico de los números irracionales y manejar el continuo de la recta real, cuyos engranajes no fueron suficientemente lubricados hasta mucho tiempo después. Haciendo breve una larga historia, podemos decir que para los ilustrados, Bernoulli, Euler y Lagrange, la descripción matemática de un fluido involucra lo siguiente:

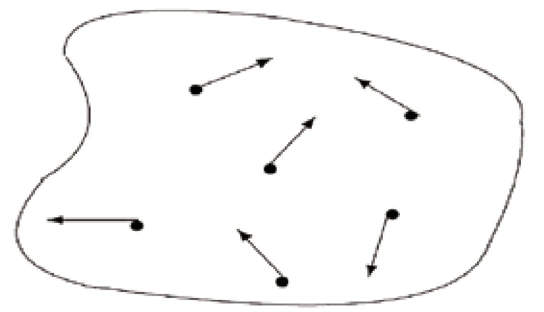


Figura 6. Dominio D y campo de velocidades. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

D es un dominio del espacio euclidiano $R3$ (o $R2$);

$x \in D$ representa a una partícula del fluido;

$\rho(x, t)$ es la densidad del fluido en el punto x en el instante t.

$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ es la velocidad que tendría una partícula situada en el punto x del espacio y en el tiempo t.

$p = p(x, t)$ es la presión en el seno del fluido, en el punto espacial x y en el instante de t.

Como hemos puntualizado, la representación ideal de una partícula fluida asociándola a un punto $x = (x1, x2, x3)$ del espacio euclidiano es una argucia legítima del modelo matemático, pero lo que signifique en cada caso (coche, espectador o "partícula de agua o de aire"), dependerá de sus características especiales. En particular, para los dos fluidos fundamentales, aire y agua, no debe confundirse con una molécula, sino con un grupo de ellas, que será lo suficientemente amplio para que podamos asociarles una velocidad común, una especie de promedio de las de sus componentes moleculares que, ahora sabemos, siguen trayectorias caóticas y carentes de dirección. Es decir, el concepto de partícula de agua o de aire es una idealización matemática que ha resultado muy útil para entender la dinámica de estos fluidos, pero que no se corresponde con una entidad real, ni tiene mucho sentido tampoco que pretendamos definir cuántas moléculas la componen.

Existen dos puntos de vista, o maneras alternativas y complementarias, de mirar a un fluido, que tradicionalmente se denominan formulación euleriana o lagrangiana, respectivamente, en honor de sus dos grandes creadores: Leonhard Euler y Joseph Lagrange.

Según Euler, un fluido queda descrito por el campo de velocidades que nos indica la velocidad de la partícula que en el instante de tiempo t se encuentra ubicada en la posición $x = (x_1, x_2, x_3)$ de un sistema fijo de coordenadas espaciales. La evolución de ese campo de velocidades, que gráficamente podemos imaginar fotografiado en cada tiempo t para obtener su imagen u en forma de un vector $u\ (x, t) = (u_1, u_2, u_3)$ con origen en el punto x, describe completamente el movimiento del fluido. Por lo que en esta formulación euleriana se trata de encontrar las leyes o ecuaciones que han de satisfacer el campo de velocidades demostrando que están bien propuestas: a partir de una observación inicial del campo en el tiempo $t = 0$, probar que existe una solución única compatible con ese dato, del que además depende continuamente.

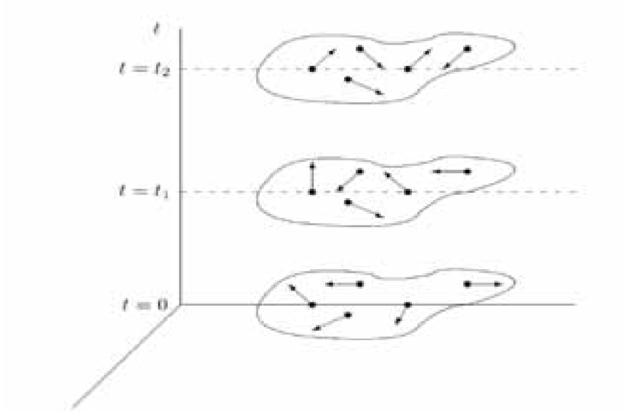


Figura 7. Dominio D $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x,t), u_3(x,t))$. *Imagen: Diego y Antonio Córdoba.*

En la formulación lagrangiana se hace énfasis en el flujo de las partículas que aparecen descritas por unas etiquetas que, generalmente, designan su posición inicial. Es decir, consideramos que el fluido está determinado por las funciones, $x = x\ (a, t)$, que nos indican la posición x que tiene la partícula que en el instante $t = 0$ se encontraba en el punto $a = (a_1, a_2, a_3)$.

De manera que ahora, si miramos al fluido, no tomamos una fotografía de su campo de velocidades, sino que nos fijamos en cada partícula y seguimos su trayectoria en el tiempo.

En estas figuras el eje vertical es el tiempo mientras que el espacio se ha representado en las coordenadas horizontales, lo que resulta evidente en dimensión 2 y requiere una cierta imaginación para dimensión 3.

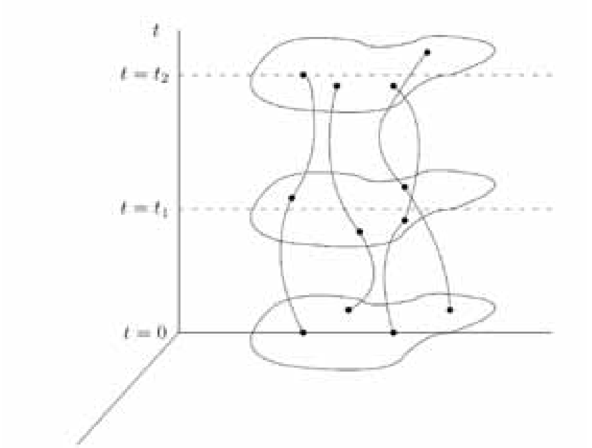


Figura 8. Trayectorias lagrangianas. $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ *Imagen: Diego y Antonio Córdoba.*

Naturalmente ambos puntos de vista son equivalentes, lo que se expresa a través de una ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t)$$

En honor del otro gran ilustrado, Daniel Bernoulli, podemos mencionar la ecuación que lleva su nombre

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{constante}$$

Donde ρ es la densidad, p la presión, h la altura y g la aceleración de la gravedad. Y esta ecuación tiene numerosas aplicaciones prácticas, por ejemplo en la fontanería, al permitirnos calcular la presión ejercida sobre una cañería conociendo la sección y el flujo de agua que la atraviesa.

TERMINOLOGÍA

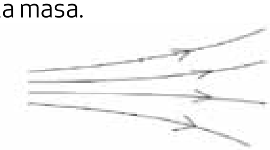
Las ecuaciones de los fluidos representan una de las cimas de la modelización matemática que fue posible escalar a partir de la base que representa el cálculo diferencial de Newton y Leibniz. Son también un exponente de aquel siglo prodigioso e ilustrado cuyos matemáticos se propusieron seriamente aplicar el cálculo a los dominios de Eolo y de Neptuno. En el empeño se crearon términos y lenguaje que luego han sido de utilidad en otras muchas áreas de las matemáticas y de la ciencia. Un ejemplo son las nociones de divergencia y de rotacional de un campo de vectores:

$$\operatorname{div}(u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

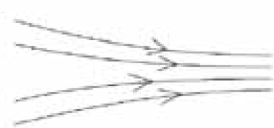
$$\operatorname{rot}(u) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

El primero, la **divergencia**, está asociada al principio de conservación de la masa que, en un fluido de densidad constante, es equivalente a la conservación del volumen. Resulta que si la divergencia es positiva entonces las trayectorias, en promedio, se separan, y de ahí el nombre de divergencia. Por el contrario, si es negativa, entonces las trayectorias convergen en media. Luego, para que el volumen se conserve, es decir, para que el fluido sea incompresible, es preciso que la divergencia se anule y, en ese caso de densidad constante, obtenemos también la ley de conservación de la masa.

$\operatorname{div}(u) > 0$



$\operatorname{div}(u) < 0$



incompresibilidad $\rightarrow \operatorname{div}(u) = 0$

En la mecánica de fluidos el rotacional del campo de velocidades se denomina vorticidad y es un carácter fundamental en la teoría. La vorticidad se deduce, pues, de la velocidad a través de la fórmula diferencial:

$$\omega(x, t) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

Ocurre, sin embargo, que en el caso de los fluidos incompresibles o de divergencia nula, podemos invertir la fórmula anterior y obtener la velocidad a partir de la vorticidad, lo que es conocido como la ley de Biôt y Savart (en cuya deducción desempeña un papel importante la solución fundamental del operador laplaciano que en el caso de dimensión 3 viene dada, salvo una constante, por la función $1/\|x\|$, mientras que en dimensión espacial 2 se trata de $\log \|x\|$):

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{y \times \omega(x+y, t)\ dy}{|y|^3}\ dy$$

La vorticidad es un término que nos sirve para cuantificar la rotación local de un fluido:

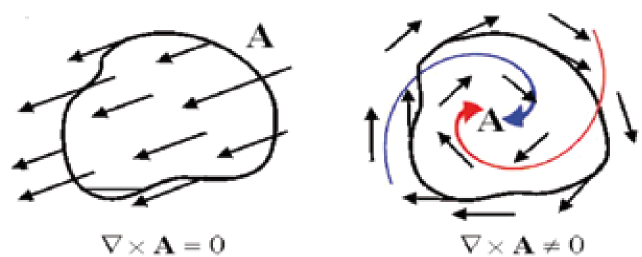


Figura 9. La vorticidad. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

En el caso de dimensión espacial $n=2$, la vorticidad resulta ser un escalar

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Pero en dimensión $n=3$ es el vector

$$\omega = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

Con ayuda del cálculo diferencial el campo de velocidades, cerca de un punto dado x, puede ser aproximado por la suma de tres términos que se corresponden con una traslación y un giro, junto a una dilatación en unas direcciones y una contracción en las restantes. La traslación viene dada por el vector $u(x)$, pero las otras están asociadas a la matriz de las derivadas parciales de las componentes del campo de velocidades, también denominada jacobiana:

$$Ju = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$$

El giro depende de la parte antisimétrica

$$\Omega u = \frac{Ju - (Ju)^t}{2}$$

donde A^t designa a la matriz transpuesta de A. Las dilataciones-contracciones están, por el contrario, asociadas a la parte simétrica:

$$Du = \frac{Ju - (Ju)^t}{2}$$

Resulta que podemos integrar explícitamente las ecuaciones de las trayectorias correspondientes a cada término local del campo, y resulta lo siguiente:

Traslación:

$x = x_0 + tu\ (x_0)$

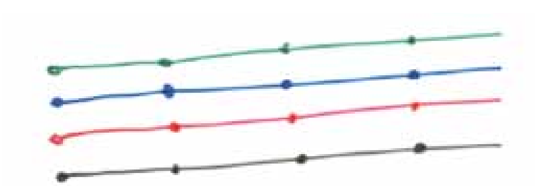


Figura 10. Traslación. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

Dilatación + Estrechamiento: Por la simetría de la matriz $D^t = D$, en un apropiado sistema de coordenadas podemos escribirla en forma diagonal

$$Du\ (x_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

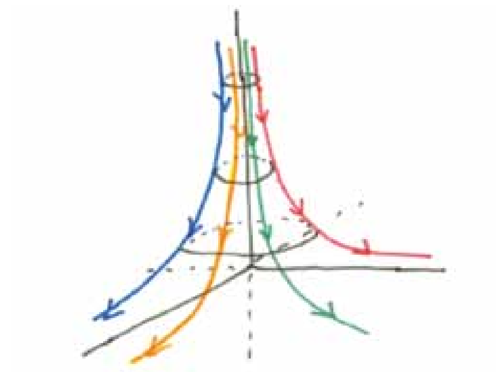


Figura 11. Dilatación + Estrechamiento. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

Rotación:

$$\Omega u\ (x_0) \cdot (x - x_0) = \frac{1}{2}\, \omega \wedge (x - x_0)$$

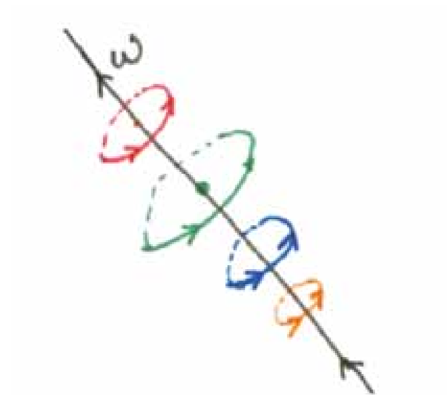


Figura 12. Rotación. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

donde $\wedge$ representa el producto vectorial.

Pero esa imagen local transmite también lo complicado que puede resultar el movimiento de las partículas cuando se mezclan la translación con la dilatación en unas direcciones y estrechamientos en las otras de esos chorros de fluido que, a su vez, pueden estar rotando con velocidades angulares diversas.

LAS ECUACIONES DE EULER Y DE NAVIER-STOKES

Las ecuaciones fundamentales de los fluidos incompresibles fueron deducidas por Euler (cuando el fluido es invíscido o carente de viscosidad) y por Navier-Stokes, quienes introdujeron el término **viscoso** en las ecuaciones de Euler. Reflejan las leyes fundamentales de conservación de la masa y de la energía, pero despreciando algunos efectos como son los debidos a la temperatura o la salinidad, que pueden llegar a ser sin embargo muy importantes en modelos más complejos.

Al contrario de lo que ocurre con otras teorías clásicas, como son el electromagnetismo y la mecánica cuántica, que están descritas por ecuaciones lineales (las de Maxwell y Schrödinger, respectivamente), el movimiento de los fluidos está gobernado por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que no son lineales. Esta es la razón por la que el conocimiento de fenómenos turbulentos de gran impacto en la naturaleza, y en nuestra vida cotidiana, no ha alcanzado todavía el nivel de otras teorías.

El mismo Leonardo da Vinci ya llamó la atención acerca de la complejidad que puede alcanzar el movimiento caótico de los fluidos cuando estos entran en un régimen turbulento. Más recientemente, Richard Feynman designó a la turbulencia como *"the most important unsolved problem in classical physics"*, mientras que se atribuye a Einstein la siguiente frase: "Voy a preguntar a Dios dos cuestiones: el porqué de la relatividad y el porqué de la turbulencia. Soy optimista en obtener respuesta a la primera de ellas".

Para obtener las ecuaciones consideramos la ley de la conservación de la masa y la segunda ley de Newton.

La ley de conservación de la masa en un fluido de densidad constante, que podemos siempre hacer igual a uno sin pérdida de generalidad, es equivalente a la conservación del volumen, es decir, a la **incompresibilidad** que viene descrita por la ecuación $\mathrm{div}(u) = 0$. En cuanto a la ley de conservación del momento, o segunda ley de Newton, nos da lugar a un sistema de tres ecuaciones diferenciales: si $u(x(t;\, y),\, t)$ designa la velocidad en el momento de tiempo t que tiene la partícula que se encontraba en la posición inicial y ($y = x(0;\, y)$), entonces la aceleración viene dada por la derivada:

$$\frac{d}{dt}u\,(x(a,t),t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x u \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u$$

La segunda ley de Newton (suponiendo que la densidad es igual a 1) da lugar a la identidad:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u\right) = F_{\text{internas}} + F_{\text{externas}}$$

Donde aparecen las fuerzas externas (gravitación, campos eléctricos o magnéticos); y las internas que modelan la interacción entre las distintas partículas fluidas, y son responsables de lo que se denomina viscosidad. He aquí las ecuaciones:

Euler: Fluidos perfectos

$$\mathrm{div}\,(u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = -\nabla_x p$$

Donde p = presión, $u = (u1,\, u2,\, u3)$ velocidad, por tanto, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

Navier-Stokes: Fluidos viscosos

$$\mathrm{div}\,(u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = -\nabla_x p + \nu\,\Delta u$$

$\nu>0$ es el coeficiente de viscosidad. Sin pérdida de generalidad hemos supuesto que la densidad ρ es igual a uno en ambos sistemas de ecuaciones.

El caso de los fluidos perfectos no requiere más análisis que la aplicación del cálculo diferencial a las leyes fundamentales de la mecánica enunciadas por Newton, pero la modelización de la viscosidad llevada a cabo por Navier y Stokes necesita de algunas hipótesis adicionales sobre la naturaleza de nuestro fluido. Existiendo modelos más complejos, caso de los fluidos viscoelásticos como la saliva, o esos materiales con los que ahora se fabrican cómodos colchones, en los que la viscosidad hay que introducirla de manera algo más complicada. En cualquier caso, la aparición del laplaciano, definido para cualquier función f:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

$$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$$

con un coeficiente positivo en la ecuación es consistente con otras teorías de difusión y de rozamiento. En este texto no se analizará la naturaleza de los términos viscosos en las ecuaciones de los fluidos, pero si queremos hacer constar que se trata de un área activa de modelización para materiales interesantes que se desvían del modelo newtoniano descrito en las ecuaciones anteriores. En cualquier caso, el principio de Arquímedes y la ecuación de Bernoulli antes aludidos son consecuencias de estas leyes fundamentales cuya deducción es un ejercicio del cálculo diferencial que manejaban los ilustrados del siglo XVIII.

Estamos, pues, en condiciones de formular el "problema del milenio" que se pregunta sobre la naturaleza de las ecuaciones obtenidas:

Problema del milenio: Dada una velocidad inicial $u(x, 0) = u0(x)$ suficientemente lisa (suficientemente diferenciable), por ejemplo de clase $C\infty$ y soporte compacto y tal que div $(u0) = 0$: ¿existe una solución lisa $u(x, t)$ válida en todo tiempo $t>0$? Partiendo de un dato liso, ¿es posible generar singularidades al cabo de un tiempo finito?

Se trata, pues, de una cuestión fundamental, por lo que puede sorprender a muchos que esté todavía abierta. Sus dificultades estriban, creemos, en dos características importantes:

- No linealidad del término convectivo $u \cdot \nabla_x u$
- No localidad de la presión: ocurre que la presión está relacionada con el campo de velocidades a través de la fórmula $-\Delta p = div\ (u \cdot \nabla\ u)$ que es fácil de deducir de las ecuaciones de Navier-Stokes con un poco de destreza en el uso del cálculo diferencial. Se trata, pues, de una relación diferencial que permite despejar la presión y escribirla en términos de las componentes del campo u. Sin embargo, cuando esto se hace (se integra la relación anterior) la expresión resultante involucra "integrales" de las funciones $u_j u_k$ pero esas "integrales" dependen de los valores de la velocidad en todo el espacio, y no solo en la vecindad del punto considerado. En otras palabras, la presión en un punto del fluido depende de las velocidades de todas sus partículas y no solo aquellas cercanas a él. Esta no-localidad de la presión es también responsable de que las ecuaciones de los fluidos resulten ser tan difíciles.

Estas son las razones por las que aún seguimos sin conocer la respuesta a una cuestión tan básica. La deducción de las ecuaciones fue un hito de las matemáticas de la Ilustración y una expresión de la potencia del cálculo y de la mente humana capaz de modelar los dominios de Eolo y de Neptuno. Pero enseguida cundió el desánimo entre aquellos ilustrados, porque tenían las ecuaciones pero no sabían resolverlas. He aquí algunos comentarios fehacientes de ese estado de frustración que, creemos, fue en gran parte motivado por las matemáticas de los fluidos:

"Me parece que la mina de las matemáticas es ya muy profunda y, a menos que descubramos nuevas vetas, pronto será necesario abandonarla. La física y la química ofrecen ahora yacimientos mucho más fáciles y brillantes". Lagrange (carta a D'Alembert, 1781).

"Me atrevo a afirmar que, en menos de un siglo, no tendremos ni tres grandes matemáticos en Europa. Esta ciencia quedará muy pronto en el estado donde los Bernoullis, Clairaut, D'Alembert y Lagrange la han dejado". Diderot (1754)

El progreso en el conocimiento de las ecuaciones de los fluidos experimentó un desarrollo crucial en el año 1933, cuando Jean Leray obtuvo unos resultados fundamentales que mostraron que el modelo estaba bien propuesto. Es decir, si la velocidad inicial es lisa (suficientemente diferenciable) entonces durante un intervalo de tiempo existe una solución única que depende continuamente de los datos iniciales.

El trabajo de Leray sería inconcebible sin el desarrollo que el análisis matemático había experimentado durante todo el siglo XIX y comienzos del XX. Uno de los grandes impulsores de este desarrollo fue Riemann, quien extendió la noción de integral y de derivada, llegando a formular el concepto de derivada débil, o en el sentido de las distribuciones que diríamos ahora, en su empeño de entender la unicidad de los desarrollos trigonométricos. Luego vendría Lebesgue, quien, con su noción de integral, abrió el paso al análisis funcional en espacios que ahora llamamos de Lebesgue o de Sobolev, y son el marco en el que hemos aprendido a buscar la existencia de las soluciones de nuestras ecuaciones.

Leray introdujo la noción de solución débil, o turbulenta según su terminología, y la estrategia de regularización de las ecuaciones por medio de viscosidades artificiales, obteniendo luego sus soluciones "débiles" como límites viscosos de las soluciones aproximantes, y dejando para un posterior análisis la importante propiedad de la diferenciabilidad y unicidad de las soluciones así obtenidas. Y en eso estamos.

Un desarrollo interesante ha venido asociado a la noción de vorticidad, dando lugar a una formulación de las ecuaciones que pone el énfasis en la evolución de ese vector (escalar en el caso bidimensional) de importancia crítica. En el año 1984, en un trabajo conjunto de los matemáticos Beale-Kato-Majda, obtuvieron un criterio para la existencia de singularidades de la solución en un tiempo T:

Singularidad en tiempo T si y solo si

$$\int_0^T sup_x \left| \omega^{(x,\, t)} \right| dt = \infty$$

Ecuación de la vorticidad:

n=2:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \omega = 0$$

n=3:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \omega = \omega R \omega$$

donde

$$R\omega = R\,(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= (R_{11}\omega_1 + R_{12}\omega_2 + R_{13}\omega_3 + R_{21}\omega_1 + R_{22}\omega_2 + R_{23}\omega_3 + R_{31}\omega_1 + R_{32}\omega_2 + R_{33}\omega_3)$$

siendo cada R_{jk} una transformación que convierte una función dada f en otra $R_{jk}f$ a través de un proceso de integración que está asociada a unos núcleos, $K_{jk}(x,y)$, que son singulares en la diagonal $x=y$. No obstante, pueden ser calculadas explícitamente y presentan unas cancelaciones (cambios de signo) que permiten darles sentido a las integrales.

$$R_{j,k}f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| > \epsilon} K_{j,k}(x,y)\, f(y)\, dy$$

pero se trata de un capítulo muy importante del análisis matemático contemporáneo cuya discusión queda fuera del contenido de esta unidad.

Estas ecuaciones, en el caso particular de dos dimensiones, muestran cómo allí la vorticidad se conserva a lo largo de las trayectorias y explican un resultado anterior de Yubovich, quien obtuvo la regularidad y la unicidad en ese caso.

Pese a que el problema del milenio sigue sin resolverse, ello no ha supuesto un obstáculo para que los desarrollos matemáticos alrededor del modelo hayan servido para entender los fenómenos atmosféricos, u obtener aplicaciones prácticas que permiten diseñar barcos y aviones. Pero sería muy conveniente saber, por ejemplo cuando uno se sube a un avión, que las soluciones existen y son únicas y suaves. El problema del milenio es, pues, una cuestión básica que clama por su respuesta. No obstante no es, ni mucho menos, el único tema importante en la mecánica de fluidos.

EJERCICIOS

1. Deduce el principio de Arquímedes de las ecuaciones de Euler.

2. Deduce la ecuación de Bernoulli de las ecuaciones de Euler.

3. Demuestra que si la vorticidad de un fluido, en dimensión dos, tiene simetría radial entonces es una solución estacionaria de las ecuaciones de Euler.

MATERIALES AUXILIARES

PELÍCULAS

Twister (Jan de Bont, 1996). Dos grupos de científicos que persiguen tormentas para estudiar los comportamientos de los tornados compiten por ser los primeros en analizar estos peculiares fenómenos meteorológicos desde dentro de un tornado. Su objetivo es analizar en profundidad la mayor tormenta que caerá sobre Oklahoma en el último medio siglo. Aunque no se da un enfoque científico, los tornados son el elemento central de la película.

DOCUMENTALES Y MATERIAL AUDIOVISUAL

The blue planet (2001). Serie documental de la BBC sobre los océanos del planeta Tierra. Cada uno de los episodios está dedicado a un aspecto diferente de la vida marina. Disponible en http://www.bbc.co.uk/programmes/b008044n.

The winds (Tony Bulley, 2011). Este documental de la BCC, dentro de la serie The Weather, explica el fenómeno del viento y resalta algunas historias relacionadas con esta fuerza de la naturaleza. Disponible en http://www.bbc.co.uk/programmes/b00jzjhx.

The life and times of El Niño (2005). Documental de la BBC dedicado a El Niño, el fenómeno meteorológico cíclico consistente en una superposición de aguas cálidas procedentes del hemisferio norte inmediatamente al norte del ecuador, sobre las aguas de emersión muy frías que caracterizan la corriente de Humboldt. El Niño provoca estragos a escala zonal (en la zona intertropical) debido a las intensas lluvias, afectando principalmente a América del Sur, tanto en las costas atlánticas como en las del Pacífico. Disponible en http://www.youtube.com/watch?v=MzcKBeW44ao.