La Hidrodinámica de Leonhard Euler

R. M. Velasco y F. J. Uribe

Departamento de Física

Universidad Autónoma Metropolitana

Iztapalapa

09340, México.

Resumen

En este trabajo se presentan algunas ideas que Leonhard Euler introdujo en el campo de la física que actualmente conocemos como hidrodinámica. Sin duda Euler las contribuciones de Euler fueron de gran trascendencia, ya que como veremos, algunos de los conceptos y ecuaciones básicas que son indispensables en el desarrollo y uso actual fueron acuñados por él.

1. Introducción

Actualmente en el campo de la hidrodinámica y en general en cualquier campo de la ciencia, utilizamos una gran cantidad de conceptos, ecuaciones y metodologías cuyo origen no conocemos del todo. Muchos de estos conceptos y métodos llegan a ser fundamentales para el entendimiento de los problemas que se tratan de resolver y sólo en ocasiones nos preguntamos por su origen. En el caso de la hidrodinámica nos preguntaríamos ¿cómo se llegó a la concepción de un fluido como medio continuo?, ¿cómo se pensó en construir ecuaciones en derivadas parciales para cuantificar el movimiento de los fluidos?, ¿las ecuaciones que se construyeron tenían un sustento experimental adecuado?, ¿quiénes participaron en la elaboración de los conceptos fundamentales y la construcción de las ecuaciones básicas? y podríamos seguir con más preguntas. Es así como llegamos a Euler.

En el desarrollo de la ciencia siempre hay muchos investigadores que con sus esfuerzos contribuyen a la construcción tanto en lo conceptual como en la práctica de un campo en particular. La hidrodinámica no es la excepción y entonces nos podemos remontar en el tiempo y tratar de rastrear el surgimiento y evolución de ciertos conceptos. En este caso, es la historia de la ciencia el campo de estudio que puede contestar a estas inquietudes, sin embargo los autores de este trabajo aún sin pretender hacer un trabajo histórico, queremos poner de manifiesto la importancia del trabajo de Euler. Para ello, nos remontaremos sólo unos cuantos años en el desarrollo de la hidrodinámica para entonces enfatizar la gran relevancia de los conceptos que Euler introdujo [1]. El caso de Euler es notable ya que es considerado uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, la recopilación de su obra consta de 76 volúmenes y aún no está completa [2], y es posible encontrar que algunos resultados atribuidos a otros autores fueron encontrados también por él.

El interés por el estudio del comportamiento de los fluidos y su posible uso en favor de la humanidad tiene orígenes remotos, ya que podemos imaginar la búsqueda de agua por los pobladores del planeta aún desde tiempos prehistóricos. Así nos encontramos que las grandes civilizaciones de la antigüedad estaban asentadas en las cercanías de grandes ríos. Pero sin ir tan lejos podemos nombrar a Leonardo da Vinci, Galileo Galilei, Evangelista Torricelli, Blaise Pascal, Isaac Newton como predecesores de la gran aportación de Leonhard Euler al campo de la hidrodinámica. En este punto pongamos especial atención a los trabajos de D. Bernoulli (1700-1782), Euler (1707-1783) y Lagrange (1736-1813) quienes nos legaron la fundamentación de la actual hidrodinámica. D. Bernoulli, contemporáneo y amigo de Euler, tenía gran interés en la mecánica de los fluidos. Consideró la influencia de la presión en el movimiento de los fluidos y escribió el primer tratado en este campo [3, 4]. Fue durante la estancia en San Petersburgo, donde ambos trabajaban, que Euler desarrolló sus trabajos principales en la mecánica de fluidos. Euler concibió a los fluidos como medios continuos e introdujo el concepto de “partícula de fluido”, construyó la conocida ecuación de continuidad para la densidad que expresa en forma matemática el hecho físico de que la masa se conserva. A su vez, usando los conocimientos que se tenían entonces acerca de la presión hidrostática, introduce la ecuación para la cantidad de movimiento o momento lineal, dando con ello la primera ecuación dinámica para los fluidos [5, 6, 7]. La ecuación de continuidad que escribió Euler aún es la piedra angular en el tratamiento de la hidrodinámica y la ecuación para el momento se utiliza para la descripción de flujos ideales, es decir que es aplicable al caso en que la viscosidad no es apreciable. Posteriomente Lagrange logró integrar las ecuaciones propuestas por Euler y junto con el trabajo de D. Bernoulli se llegó a lo que actualmente se conoce como “Teorema de Bernoulli”.

A lo largo de este trabajo desarrollaremos los conceptos mencionados y por otra parte, nos iremos a la actualidad para tratar de hacer notar al lector que el trabajo de Euler no sólo sigue vigente, sino que además es esencial en este campo [8].

2. Conceptos fundamentales

La descripción del comportamiento de sistemas macroscópicos ya sean sólidos o fluidos presenta un reto donde es necesario decidir el nivel de descripción que se quiere efectuar. Actualmente, sabemos que dichos sistemas están compuestos por un número muy grande de átomos o moléculas, que en el caso de los sólidos están ordenados formando arreglos cristalinos o bien son amorfos y se mueven un poco alrededor de sus posiciones de equilibrio. En el caso de los fluidos, ya sean líquidos o gases, las partículas microscópicas que los forman están en continuo movimiento y en forma desordenada. Ahora bien, si queremos hacer una descripción muy detallada podríamos proponernos describir el movimiento de las partículas que los forman. Esta tarea está fuera del alcance si uno no utiliza los métodos de la mecánica estadística, dicho tratamiento no es estrictamente necesario y en algunos casos es preferible hacer una descripción que sin ser detallada nos permita cuantificar propiedades y comportamientos macroscópicos. En este caso no necesitamos hablar de los átomos o moléculas que forman al sistema sino que podemos concebirlos como medios continuos. Una descripción cuantitativa del comportamiento de un sistema requiere de especificar posiciones, velocidades y otras cantidades asociadas a sus elementos; en el caso de los fluidos por ejemplo nos gustaría poder decir cuál es la velocidad de salida de un fluido que está en un tanque con un agujero al fondo de su pared lateral [9] o bien conocer la forma en que se transmite la presión en un fluido [10]. Es en la concepción de un medio continuo y la forma de trabajar matemáticamente con ello, la primera aparición del trabajo de Euler. Si macroscópicamente vemos el movimiento de un fluido podemos pensar en seguir un determinado punto en él ver hacia donde va y que velocidad lleva, pero para Euler un punto (matemático) es un elemento con posición, que sigue una cierta trayectoria, pero un punto no tiene volumen y por tanto no puede contener una masa de fluido. Ante esta disyuntiva, Euler introduce el concepto de una "partícula de fluido", que en el lenguaje moderno podemos definir como un elemento de volumen en el fluido cuyas dimensiones son tales que macroscópicamente son mucho menores que el tamaño del sistema y puede verse como un punto, pero son grandes comparadas con la trayectoria libre media de laspartículas contenidas en él [11]. Este concepto resuelve el problema de asignar volumen y masa, entre otras propiedades, a un punto en el fluido, de manera que siempre podemos hablar de las partículas de fluido introducidas por Euler. Así, a una partícula de fluido le podemos asignar las propiedades físicas usuales y preguntarnos por su trayectoria, velocidad, cantidad de movimiento lineal, energía, entre otras [4], de esta manera cuando se habla de un punto en el fluido nos referimos a una partícula de fluido. Una vez que Euler introdujo este concepto, es inmediato hablar de propiedades como la densidad en el fluido $\rho(x, y, z, t)$ que se define como la masa por unidad de volumen, la velocidad $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$ en el caso de movimiento en tres dimensiones, la presión $p(x, y, z, t)$ cuyas propiedades estudió principalmente B. Pascal [10], aunque Euler también contribuyó al desarrollo de la hidrostática [12].

Es importante notar que Euler utiliza las propiedades antes dichas y las escribe dependientes de las coordenadas de posición y del tiempo [13], esto significa que escoge un sistema de coordenadas fijo para hacer la descripción del comportamiento en el fluido, actualmente esta forma de enfocar la descripción se conoce como el "esquema euleriano". Así todas las variables son de hecho campos escalares, vectoriales o en general tensoriales y con ellas trata de describir las trayectorias que siguen las partículas de fluido. En contraste Lagrange fija su atención en una partícula de fluido que al tiempo inicial $t = t_0$ tiene ciertas coordenadas (x_0, y_0, z_0) y la sigue en su movimiento de manera que al tiempo $t > t_0$ su posición estará determinada como $x(t) = x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y(t) = y_0(x_0, y_0, z_0, t)$, $z(t) = z(x_0, y_0, z_0, t)$; esta forma de describir al fluido se conoce como "esquema lagrangiano", en este caso todas las variables de la partícula de fluido son funciones del tiempo y de sus coordenadas iniciales [14]. Aquí, la descripción se está haciendo desde un sistema de coordenadas anclado en la partícula de fluido y que se mueve con la misma velocidad que ésta [4, 15]. Evidentemente es posible pasar de un esquema a otro, pero la concepción es completamente diferente [16].

Regresando al esquema euleriano, mencionemos que Euler introdujo el concepto de "líneas de corriente", que son las trayectorias que siguen las partículas de fluido cuando éste se encuentra en movimiento. Con el objeto de simplificar la explicación de este concepto, consideraremos un flujo estacionario (las variables no dependen explícitamente del tiempo) y para cada punto (x, y, z) vemos la velocidad del fluido y trazamos una línea cuya tangente sea dicha velocidad. Esto permite construir un conjunto de líneas que se conocen como líneas de corriente y la ecuación que las determina es

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{1}$$

donde $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ es el elemento de la línea en cuestión. Vemos entonces que estas líneas describen el movimiento de las partículas de fluido en el flujo. Para el caso en que el flujo no es estacionario y por lo tanto las variables dependen explícitamente del tiempo, es posible construirlas de la misma manera pero es muy importante que cada construcción se realice para un tiempo fijo. Dicho de otra manera, tomamos fotografías del flujo y para cada fotografía trazamos las líneas de corriente. En la actualidad la construcción de líneas de corriente constituye una herramienta muy poderosa para la visualización del flujo, de hecho se usa experimental y computacionalmente como una herramienta de investigación [17].

3. Ecuaciones de Euler

Después de analizar las propiedades de la presión [12] y sus efectos sobre el equilibrio de los fluidos, Euler se propone estudiar [18] su movimiento y para ello comienza con la densidad de masa. Si vemos el seno de un fluido en movimiento y consideramos el transporte de la masa contenida en un volumen $dV = dxdydz$ en un intervalo de tiempo dt y no tenemos fuentes o sumideros de fluido, la cantidad de masa se conservará. Esto permitió a Euler escribir la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

donde tanto la densidad ρ como las componentes de la velocidad (v_x, v_y, v_z) son funciones de la posición (x, y, z) y del tiempo t. Como ya se mencionó antes, esta ecuación es básica en el desarrollo y planteamiento de la hidrodinámica así como en aplicaciones a diversos sistemas complejos [19, 20].

Teniendo como antecedentes los trabajos de Newton, para Euler era claro que los cambios temporales en el momento lineal de un volumen de fluido debían producirse bajo la influencia de fuerzas que actuaran sobre él. Las fuerzas ya conocidas en ese tiempo eran la presión y el peso, de manera que ambas se tomaron en cuenta para escribir la ecuación de movimiento para los fluidos. De acuerdo con los trabajos de Newton la fuerza total nos da el cambio en la cantidad de movimiento, de manera que Euler escribió

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \tag{3}$$

$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \tag{4}$$

$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{5}$$

donde (F_x, F_y, F_z) son las componentes de la fuerza externa por unidad de masa. En el caso más común serían las componentes de la aceleración gravitatoria.

Nuevamente debemos decir que las ecuaciones de movimiento (3)-(5) constituyen un pilar en el desarrollo de la hidrodinámica, sin embargo tal como están escritas sólo son aplicables para flujos ideales, o bien para aquellos casos en los que los efectos no ideales, como la fricción y la conductividad térmica, se pueden despreciar. Aunque ya Newton y el mismo Euler se preocuparon por la introducción de la fricción en el movimiento de los fluidos, fue hasta más tarde que estos efectos se incorporaron a la ecuación de movimiento llegando a las ecuaciones actualmente conocidas como “Ecuaciones de Navier-Stokes”.

Cabe hacer notar que el tratamiento de flujos ideales parece ser restrictivo, sin embargo actualmente se tienen criterios muy claros para decir bajo qué circunstancias es válido usar las ecuaciones de Euler. De hecho, si introducimos una longitud macroscópica típica del tamaño del sistema L, una velocidad característica U, la viscosidad cortante η y la densidad del fluido ρ podemos pasar las ecuaciones de Navier-Stokes a variables adimensionales y encontrar que el número de Reynolds $\mathcal{R}e = \frac{\rho U L}{\eta}$ nos da un criterio para decir si podemos usar las ecuaciones de Euler o si es necesario usar las ecuaciones completas en la solución de un problema específico. Asimismo ([21], [16]), se tienen criterios para decir cuándo un flujo se puede considerar estacionario, incompresible y más.

Observando el conjunto de ecuaciones dinámicas escritas por Euler, ((3)-(5)), vemos que hay cinco funciones a determinar en su posible solución (ρ, v_x, v_y, v_z, p); Euler señaló que al tomar en cuenta la ecuación de continuidad (2), tendría cuatro ecuaciones y posteriormente haría falta una relación más, así sugirió que la ecuación de estado del fluido se usara para completar el esquema. Fué Lagrange [1] quien desmostró que esto era posible, teniendo entonces un conjunto completo de ecuaciones.

El paso siguiente consiste en tratar de integrar las ecuaciones; al menos para algunos casos particulares, tanto Euler como algunos otros investigadores se dieron a la tarea de hacerlo y encontraron diversas soluciones para problemas muy específicos. Dejando de lado casos particulares, mencionamos que Lagrange logró integrar las ecuaciones de Euler en dos casos: 1) para flujo potencial (irrotacional: $\nabla \times \mathbf{v} = 0$) y 2) para flujo no potencial pero estacionario [1]. La integración realizada por Lagrange junto con el trabajo realizado por Bernoulli dió lugar al conocido Teorema de Bernoulli y con ello a múltiples aplicaciones.

4. Aplicaciones

Los estudios de Euler en fluidos, ya sea en el caso estático o dinámico, tienen diversas aplicaciones algunas de las cuales fueron planteadas y desarrolladas por él. Otras se han reconocido recientemente y nuestro conocimiento en algunas de ellas no es tan profundo como para hablar de ellas con detalle, sin embargo consideramos que el lector podría estar interesado en tener citas de algunas aplicaciones.

Mencionaremos algunos de los campos de la ciencia y la tecnología en los cuales las ecuaciones hidrodinámicas de Euler (o sus generalizaciones no disipativas) son utilizadas.

4.1. Arquitectura Naval.

Como dijimos anteriormente, Euler estudió el equilibrio y la dinámica de los fluidos [12, 18] (ver también [5]: E64, E89, E225, E227, E258, E260, E276, E331, E332, E375, E396, E409, E424, E494). Sus investigaciones lo llevaron a establecer la teoría moderna de barcos [5] (E4, E27, E78, E94, E110, E111, E116, E137, E150, E413, E415, E426, E520, E545). Dentro de sus múltiples estudios destacan aquéllos relacionados con la estabilidad hidrostática de los barcos, que derivó integrando la distribución de presión en un fluido en reposo alrededor del barco; la teoría sobre la resistencia al movimiento de los barcos al moverse en el fluido y sus contribuciones a diversos métodos de propulsión de barcos, oscilaciones y maniobras, entre otras investigaciones. Una característica de sus trabajos puede resumirse en la siguiente frase atribuida a C. Truesdell en relación al trabajo realizado por Euler: *First principles, generality, order and above all clarity*. La siguiente frase atribuida al constructor naval Suizo F. H. Chapman en relación al trabajo de Euler: *Without a good theory, design is only a game of hazard!*, reafirma el comentario de Truesdell. Esta sola aplicación de la teoría desarrollada por Euler, y llevada a cabo por él, es mucho más de lo que algunos de nosotros podemos aspirar a realizar en nuestra vida. Sin embargo, como veremos, existen otras aplicaciones.

4.2. Sonido.

Las investigaciones de Euler también abarcaron estudios sobre sonido, acústica y teoría de la música (E2, E33, E305, E306, E307, E314, E315, E340, E457). La explicación del sonido como una perturbación utilizando las ecuaciones hidrodinámicas de Euler es bien conocida [21] y es tan directa que ilustraremos el punto a continuación. Por simplicidad consideramos una onda plana que se propaga en un gas sobre el cual no actúan fuerzas externas, para la cual se tiene que

$$v_x(x,y,z,t) = u(x,t), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Como no existe flujo de calor podemos pensar que el proceso es adiabático y para introducir la relación entre la presión y la densidad hacemos la hipótesis de equilibrio local, que consiste en suponer que las leyes de la termodinámica clásica valen localmente; así se justifica tomar $p(x,t) = C\,\rho(x,t)^\gamma$, con C y γ constantes que de hecho son conocidas a partir de la termodinámica si uno considera, por ejemplo, el caso de un gas ideal. Bajo las restricciones anteriores las ecuaciones de conservación de masa y momento, ecuaciones (2)-(5) nos llevan al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho\, u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\,p}{d\,\rho}\right)_S \frac{\partial \rho}{\partial x}, \end{aligned} \tag{7}$$

donde el subíndice S significa que la derivada debe calcularse con entropía constante, esto es equivalente a utilizar $p = C\,\rho^\gamma$ donde $\gamma = c_p/c_V$ es el cociente de los calores específicos en el caso de un gas ideal. El estado de equilibrio está caracterizado por densidad ρ_0, presión p_0 constantes y velocidad nula $u_0 = 0$) situación que corresponde a una solución de las ecuaciones (7). Ahora consideramos perturbaciones respecto al estado de equilibrio termodinámico en la forma $u(x,t) = \epsilon\, u_1(x,t)$, $\rho(x,t) = \rho_0 + \epsilon\, \rho_1(x,t)$. Al substituir estos desarrollos en las ecuaciones (7) obtenemos, aproximado hasta un orden ϵ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_1(x,t) + \left(\frac{\partial}{\partial x}u_1(x,t)\right)\rho_0 &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}u_1(x,t) + C\,\gamma\,{\rho_0}^{\gamma-1}\frac{\partial}{\partial x}\rho_1(x,t) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Es fácil ver que tanto u_1 como ρ_1 satisfacen la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{9}$$

donde $v_s \equiv \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ es la velocidad del sonido [22] en el fluido y $p_0 = C\,\rho_0^\gamma$.

El cálculo anterior muestra en forma simple cómo podemos entender la propagación del sonido a través de grandes extensiones de fluido, como es el caso de la atmósfera y el océano, utilizando las ecuaciones hidrodinámicas de Euler. Existen sin embargo algunos puntos que deben considerarse con mayor detalle, uno de ellos es que el cálculo anterior se llevó a cabo linealizando las ecuaciones de Euler y de manera natural surge la pregunta de qué sucede si uno quiere resolver las ecuaciones no lineales; otro punto importante es que la solución obtenida corresponde a una onda plana que se propaga sin atenuarse (note que en el caso de una onda esférica puede existir atenuación geométrica). La falta de atenuación en el caso de una onda plana es resultado de no considerar los efectos disipativos causados por la viscosidad y la conductividad térmica del fluido. Finalmente el lector habrá notado que hasta el momento no hemos mencionado la temperatura (o energía interna); a este respecto podemos decir que Euler (E226) menciona que la presión en el fluido puede verse influenciada no sólo por la densidad, sino también por otras cualidades, de hecho habla de la "cantidad de calor" en puntos del fluido. Aun así, hasta donde hemos podido ver no construye la ecuación dinámica correspondiente, que tendría que ser la ecuación de balance de energía. El problema de considerar efectos no lineales lo responderemos en parte al considerar el problema de ondas de choque. La inclusión de efectos disipativos se lleva a cabo considerando las ecuaciones de Navier-Stokes que representan un modelo físico más apropiado para fluidos reales, aunque las ecuaciones de Euler dan información relevante. Por último, la manera natural de considerar la energía interna es a través de la ecuación de conservación de la energía, que no ha sido incluida hasta el momento. Otra ley de conservación (o balance) que es necesario discutir es la ecuación para el momento angular, ésta fue considerada por Euler con el nombre de momento del momento. El lector interesado en mayores detalles relativos a estos temas puede consultar la bibliografía [7, 16]. Por completez y debido a que la necesitaremos escribimos aquí la ecuación de balance de energía para el caso de un gas ideal, a saber,

$$\frac{3}{2} R\,\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \tag{10}$$

donde hemos utilizado la ecuación calórica de estado $U = 3\,R\,T/2$ en su forma local, U es la energía interna, R una constante y T la temperatura. La ecuación de estado en su forma local para un gas ideal es $p = R\,\rho\,T$.

4.3. Ondas de Choque.

Regresando a la ecuación de onda, ecuación (9), notamos que $f(x - c\,t)$, con c constante la satisface, siempre y cuando para la función f existan sus segundas derivadas. Esta función representa una onda viajera que se mueve en el medio con velocidad c. Ahora queremos saber si existen soluciones exactas (sin linearizar) del tipo de onda viajera para las ecuaciones de Euler y la de balance de energía, con la condición que para cada t fijo los límites en $x = \pm\infty$ tengan valores definidos. Nuevamente consideramos el caso de una onda plana ya que los cálculos pueden hacerse en forma simple y directa. Las ecuaciones de Euler, (2)–(5), y la de la energía (10) para el caso en que $v_x(x,t) = u(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$, $p = p(x,t)$, y $T = T(x,t)$ son

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho\, u}{\partial x} &= 0, \\
\rho\left(\frac{\partial\, u}{\partial\, t} + u\frac{\partial\, u}{\partial\, x}\right) &= -\frac{\partial\, p}{\partial\, x}, \\
\frac{3}{2}\,R\,\rho\left(\frac{\partial\, T}{\partial\, t} + u\,\frac{\partial\, T}{\partial\, x}\right) &= -p\,\frac{\partial\, u}{\partial\, x}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Como buscamos soluciones del tipo $u(x,t) = u(x - c\,t)$, $p(x,t) = p(x - c\,t)$, $T(x,t) = T(x - c\,t)$, y $\rho(x,t) = \rho(x - c\,t)$, con c constante, podemos considerar un sistema de referencia que se mueve con velocidad c de tal manera que la onda permanece estacionaria, es decir, $u(x,t) = u(x)$, $p(x,t) = p(x)$, $T(x,t) = T(x)$, y $\rho(x,t) = \rho(x)$. Así las ecuaciones (11) se reducen a

$$
\frac{d\,\rho\,u}{d\,x} = 0, \quad \rho\,u\,\frac{d\,u}{d\,x} = -\frac{d\,p}{d\,x}, \quad \frac{3}{2}\,R\,\rho\,u\,\frac{\partial\,T}{\partial\,x} = -p\,\frac{\partial\,u}{\partial\,x}, \tag{12}
$$

que pueden integrarse, obteniéndose

$$
\rho\,u = C_1, \quad \rho\,u^2 + p = C_2, \quad \frac{3}{2}\,R\,\rho\,u\,T + p\,u + \rho\,u^3/2 = C_3, \tag{13}
$$

con C_1, C_2, y C_3, constantes. Denotando los valores de las variables hidrodinámicas en uno de los extremos ($x = \pm\infty$) con subíndice 0, los valores en el otro extremo con subíndice 1, y utilizando la ecuación de estado para eliminar la presión, concluimos que sólo existen dos casos para los cuales los valores en un extremo están relacionados con los valores en el otro extremo. El primer caso es muy simple y corresponde a

$$\rho_1 = \rho_0, \quad T_1 = T_0, \quad u_1 = u_0. \tag{14}$$

En el segundo caso se obtienen las llamadas relaciones de Rankine-Hugoniot, a saber

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{4\,\rho_0 {u_0}^2}{{u_0}^2 + 5\,RT_0}, \quad T_1 = -\frac{({u_0}^2 + 5\,RT_0)\,(-3\,{u_0}^2 + RT_0)}{16\,{u_0}^2 R}, \\ u_1 &= \frac{{u_0}^2 + 5\,RT_0}{4\,u_0}. \end{aligned} \tag{15}$$

Concluimos que la única solución a las ecuaciones hidrodinámicas consideradas con los requerimientos buscados, es la solución constante ya que no hay dependencia en x. Ahora bien, nos damos cuenta de que en el segundo caso $\rho_1 \neq \rho_0$, $u_1 \neq u_0$, $T_1 \neq T_0$, lo cual quiere decir que si en $x = +\infty$ tenemos los valores $(\rho_0,\, u_0,\, T_0)$ entonces ha ocurrido un salto de manera que en $x = -\infty$ tenemos $(\rho_1,\, u_1,\, T_1)$. Esto se reconoce en la literatura como la presencia de una onda de choque que viaja en el fluido con velocidad c y que conduce a un cambio, en general brusco, en el valor de las variables. Rayleigh [23] y Taylor [24] mostraron que si se incluyen los efectos disipativos entonces es posible tener una solución que une a los valores dados por las relaciones de Rankine-Hugoniot, de manera que es posible tener $\rho(x)$, $u(x)$, $T(x)$ funciones continuas con los valores extremos en $x = \pm\infty$ dados por la ecuaciones (15). En otras palabras es necesario considerar la ecuaciones de Navier-Stokes para poder encontrar soluciones no constantes al problema aquí planteado. De hecho en el caso de las soluciones obtenidas con las ecuaciones de Navier-Stokes las soluciones obtenidas son derivables y por tanto continuas.

Quisieramos enfatizar el hecho de que aún cuando las ecuaciones hidrodinámicas para fluidos ideales (las ecuaciones de Euler junto con la ecuación de la energía) no permiten soluciones continuas con valores distintos en los extremos, las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot se deben cumplir para teorías hidrodinámicas más generales; en este sentido pensamos que las ecuaciones de Euler dan resultados relevantes. Por otro lado aun cuando se puede pensar que la no existencia de soluciones continuas para las ecuaciones de los fluidos ideales (también llamados perfectos) es un argumento que favorece contundentemente el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes, es necesario mencionar que los matemáticos utilizan soluciones discontinuas, también denominadas soluciones débiles, que unen los dos valores valores dados por las ecuaciones (15). Estas soluciones débiles tienen relevancia no solo para el problema de las ondas de choque en fluidos ideales sino también para las ecuaciones de Navier-Stokes. Por ejemplo, el estudio de Leray [26] sobre soluciones débiles a las ecuaciones de Navier-Stokes, es mencionado como relevante por Fefferman [27] en su presentación al problema (uno de los siete problemas del milenio anunciados por el Instituto de Matemáticas Clay) concerniente a la existencia y suavidad de soluciones para las ecuaciones de Navier-Stokes. La razón es que una de las estrategias para mostrar existencia de soluciones suaves es mostrar la existencia de soluciones débiles, para después mostrar que éstas son suaves.

Comentarios Finales

En la sección anterior vimos algunas aplicaciones que son fáciles de describir como la Arquitectura naval, aún cuando los detalles pueden ser difíciles de explicar, y también mecionamos dos aplicaciones de la ecuaciones de los fluidos ideales. Creemos haber podido mostrar, de manera breve, cómo Euler es sin duda uno de los pilares fundamentales de la mecánica de fluidos. Sin embargo, sería ingenuo pensar que después de él no ha habido desarrollos importantes o que las aplicaciones de sus ideas terminaron con sus estudios. La aeronáutica, por ejemplo, tiene como uno de sus objetivos el diseño de aviones que disminuyan la fuerza de arrastre y sus métodos se sustentan en la aerodinámica que a su vez está fundada en la ecuaciones de Euler, aún cuando en ciertas circunstancias es necesario recurrir a las ecuaciones de Navier-Stokes [28]. Si pensamos en la presencia que tienen los fluidos en nuestra vida diaria resulta que están en todas partes (son omnipresentes), desde la sangre en nuestras venas hasta los inmensos oceános y los necesarios cuerpos de agua dulce. Las ecuaciones de los fluidos perfectos son utilizados en Oceanografía, Meteorología y Acústica, por nombrar tres ramas del conocimiento.

Pero no debemos pensar que todos los fluidos se describen apropiadamente por las ecuaciones de Euler, ya hemos mencionado que cuando los efectos disipativos son importantes es necesario extender las ecuaciones de Euler y considerar las de Navier-Stokes. Pero aun estas últimas no describen la totalidad de fluidos en la naturaleza. Si consideramos temperaturas altas, los átomos y moléculas que conforman la materia se pueden ionizar teniéndose la posibilidad de tener plasmas, el llamado cuarto estado de la materia. En presencia de campos electromagnéticos el plasma se puede describir como un fluido cargado y la disciplina que estudia esto es denominada magnetohidrodinámica. La influencia de Euler queda de manifiesto al notar que en muchos casos a las ecuaciones correspondientes se les llama ecuaciones de Euler, aun cuando se consideren los efectos de campos electromagnéticos. Aunque los plasmas no nos son tan familiares, son abundantes en el cosmos y muchas de las aplicaciones de la magnetohidrodinámica se hacen en esta dirección, pero siendo la astrofísica una disciplina ajena a los autores nos conformamos con mencionar que las ideas de Euler han fructificado en esta dirección.

Para concluir quisiéramos mencionar el tremendo impacto que tuvo en nosotros conocer con mayor detalle la obra de Euler, la cual es monumental no sólo en la hidrodinámica.

Referencias

[1] G. A. Tokaty; *A History and Philosophy of Fluid Mechanics*, Dover (1994).

[2] E. A. Fellmann; *A Tale of Three Cities, Two Academies, and an Opera Omnia in 76 Volumes (and Counting)*, Revisión de Libro por P. J. Davis. SIAM News, **40**, No. 4, Mayo 2007.

[3] D. Bernoulli; *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Berlín, escrito en San Petersburgo.

[4] C. Truesdell, *Notes on the History of the General Equations of Hydrodynamics*, Am. Math. Montly, **60** (1953) 445–458.

[5] Eneström Index, http://www.math.dartmouth.edu/∼ euler. El índice Eneström caracteriza la obra de Euler con la letra E seguida de un número, por ejemplo el índice Eneström de las referencias [12, 18] es E225 y E226, respectivamente.

[6] C. A. Truesdell, Introducción en *Euler Opera Omnia*, Ser. II, vol 12, (1954).

[7] C. A. Truesdell y R. A. Toupin, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Pt. 3, 226–793 (1960).

[8] Debemos decir que nos ha sido díficil llegar a los trabajos originales, de hecho una gran parte de ellos no cuentan con traducción y fueron escritos en latín, francés, y alemán, ya que Euler conocía todos estos idiomas y escribía en ellos de acuerdo a las diferentes circunstancias de trabajo en las que se vió involucrado. Lo más cercano al trabajo original resulta ser el trabajo de C. A. Truesdell [6], conocedor profundo del trabajo de Euler y que escribió la introducción de uno de los volúmenes de *Opera Omnia*, trabajo que recopila la obra de Euler y aún no se ha terminado de reeditar.

[9] E. Torricelli (1608-1647) se ocupó de este problema.

[10] B. Pascal (1623-1662)*Collection of Pascal's Works*, Trans. H. B. Spiers, A.G.H. Spiers, Columbis University Press, New York (1937).

[11] La trayectoria libre media en un fluido se define como la distancia promedio que viajan los átomos o moléculas que forman al sistema, entre dos colisiones.

[12] L. Euler; *Principes generaux de l'etat d'equilibre des fluides*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 11 (1757), 217-273. Índice Eneström E225.

[13] Al parecer Euler siempre usó coordenadas cartesianas.

[14] G. M. Homsy *et al*; *Multimedia Fluid Mechanics*, Cambridge (2004).

[15] En la literatura consultada no es claro si la descripción ahora conocida como lagrangiana fue realmente introducida por Lagrange. De hecho en la referencia [4] se afirma que fue Euler quien en una carta a Lagrange construye las ecuaciones dinámicas en el esquema lagrangiano, desgraciadamente no tenemos acceso a la carta en cuestión. A su vez en la referencia [7] se hace una anotación semejante aunque un tanto contradictoria.

[16] R. M. Velasco; *Introducción a la Hidrodinámica Clásica*, FCE (2005).

[17] http://www.euler-2007.ch/posters/doc/Euler_and_fluids.jpg

[18] L. Euler; *Principes generaux du movement des fluides*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 11 (1757), 274-315. Índice Eneström E226.

[19] D. Helbing; *Traffic and related self-driven many particle systems*, Revs. Mod. Phys. 73 (2001), 1067-1141.

[20] E. Bertin, M. Droz, G. Grégoire; *Boltzmann and hydrodynamic description for self-propelled particles*, Phys. Rev. E 74 (2006) 022101.

[21] L.D. Landau, E. M. Lifshitz; *Fluid Mechanics*, Addison Wesley (1968).

[22] En condiciones estándar de presión y temperatura para el aire, $p_0 = 1$ atmósfera y $T_0 = 273 \cdot 15$ grados Kelvin , la densidad de masa y el cociente de los calores específicos tienen los valores; $\rho_0 = 0 \cdot 0012928\, gr/cm^3$ y $\gamma = 1 \cdot 401$. Para la velocidad del sonido el valor es $v_S = \sqrt{\gamma\, p_0/\rho_0} \approx 331 \cdot 37$ metros/segundo.

[23] Lord Rayleigh, *Aerial Plane Waves of Finite Amplitude*, Proc. Roy. Soc. A, **84**, 247 (1910).

[24] G. I. Taylor, *The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases*, Proc. Roy. Soc. A, **84**, 371 (1910).

[25] L. Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Addison Wesley (1966).

[26] J. Leray, *Sur le Mouvement d'un Liquide Visuqex Emplissent l'Space,* Acta Mathem. , **63** 193-248 (1934).

[27] C. L. Fefferman, *Existence & Smoothness of the Navier–Stokes equations,* http://www.claymath.org/prizeproblems/navierstokes.htm (2000).

[28] Un ejemplo patente de ello ocurrió con la llamada "paradoja de D'Alembert" que establece que un cuerpo liso en movimiento sumergido en un flujo continuo, irrotacional en un fluido ideal y que en el infinito está en reposo, no experimenta fuerza alguna [4]. Euler estableció claramente la paradoja y a su vez hizo notar que el caso considerado por D'Alembert era aplicable solamente a flujos irrotacionales y éstos constituyen un caso especial; basta considerar flujos no irrotacionales para que la paradoja no se presente. Una de las causas de la no irrotacionalidad son los efectos disipativos.