

Aspectos de la dinámica de la espiral de Ekman

JOSÉ ANTONIO LÓPEZ

La espiral de Ekman fue propuesta como modelo teórico del movimiento de las capas superficiales del océano por primera vez en 1902 por el científico sueco Vagn Walfrid Ekman (1874-1954), y es una consecuencia de la fuerza de Coriolis. Cuando el agua superficial se mueve por la fuerza del viento, arrastra a su vez capas más profundas de agua. Cada capa de agua se mueve por fricción más lentamente que la capa superior, hasta que el movimiento cesa a una profundidad de aproximadamente 100 m. Sin embargo, al igual que las aguas superficiales, las aguas más profundas son desviadas por el efecto Coriolis, a la derecha en el hemisferio norte y a la izquierda en el hemisferio sur. Como resultado, cada capa de agua sucesivamente más profunda se mueve más lentamente hacia la derecha o hacia la izquierda, creando un efecto espiral.

La espiral de Ekman en el océano resulta del equilibrio entre la fuerza de fricción entre capas y la fuerza de Coriolis, en ausencia de gradiente de presión:

$$K \mathbf{V}'' + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (1)$$

siendo K la viscosidad turbulenta que mide el intercambio de momento lineal por unidad de superficie entre capas adyacentes y f el parámetro de Coriolis, y las comillas indican derivación respecto a la coordenada vertical z . La forma más directa de resolver el equilibrio (1) es planteando las ecuaciones en coordenadas cartesianas horizontales x, y como hizo el propio Ekman en su publicación de 1905. Pero sin duda la forma más rápida y elegante consiste en plantear (1) en el plano complejo (como hacen muchas referencias modernas como Haltiner o Holton) y resolver la ecuación diferencial de segundo orden elemental que se obtiene. Pero si queremos comprender mejor el juego de equilibrios que produce la espiral es mejor plantear (1) en coordenadas polares.

De forma cualitativa no es difícil ver que la solución de (1) deber ser una espiral. En primer lugar la dirección de \mathbf{V} no puede ser constante con la altura, pues ello implicaría que la derivada segunda \mathbf{V}'' tuviera la misma dirección de \mathbf{V} , pero la fuerza de Coriolis es siempre deflectora, ortogonal a \mathbf{V} y el equilibrio sería imposible. Por tanto descartamos una solución puramente lineal para \mathbf{V} . Pero tampoco es posible que el módulo de \mathbf{V} sea constante al variar z , ya que al derivar dos veces este vector obtenemos necesariamente una componente "centrípeta", de forma análoga a lo que sucede al derivar respecto al tiempo dos veces para calcular la aceleración en un movimiento circular. Esta componente centrípeta de \mathbf{V}'' , que tiene la misma dirección que \mathbf{V} , no puede compensarse nunca con la fuerza de Coriolis perpendicular a ella. Con esto descartamos la solución circular pura. Concluimos que tanto la dirección como el mó-

dulo de \mathbf{V} deben variar con z , y eso, al menos localmente, da una hodógrafa (curva en el plano que describe el extremo de \mathbf{V} al variar z) en forma de espiral.

Para un análisis más detallado de (1) es conveniente como dije usar coordenadas polares para representar \mathbf{V} en su hodógrafa. La derivada segunda de \mathbf{V} se calcula de forma análoga a la aceleración de un punto de vector de posición \mathbf{R} en el plano en coordenadas polares, solo que aquí hay que sustituir \mathbf{R} por \mathbf{V} y las derivadas temporales por las derivadas respecto a z . Designando con ω la derivada del ángulo polar θ respecto a z , $\omega = d\theta/dz = \theta'$, obtenemos las componentes radial y angular (según la perpendicular al radio vector \mathbf{V} hacia la izquierda) de \mathbf{V}'' :

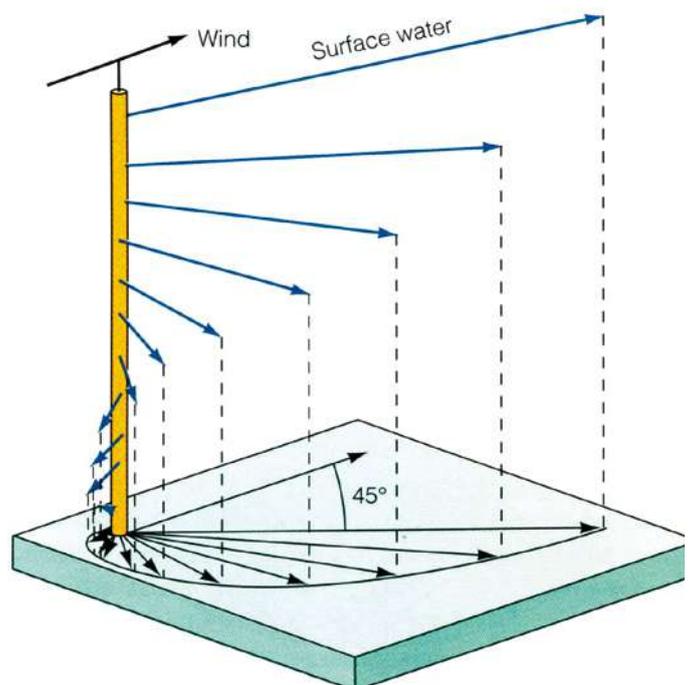
$$V''_r = V'' - \omega^2 V \quad (2)$$

$$V''_\theta = V \omega' + 2 V' \omega \quad (3)$$

La fuerza de Coriolis tiene solo componente angular ortogonal a \mathbf{V} como se dijo, y por tanto la componente radial de \mathbf{V}'' dada en (2) debe ser nula para satisfacerse (1). Por tanto tenemos una primera ecuación dinámica:

$$V'' = \omega^2 V \quad (4)$$

que implica que la derivada segunda de \mathbf{V} respecto a z , \mathbf{V}'' , sea necesariamente positiva. Por tanto el gráfico del módulo de \mathbf{V}



“The spiral is a spiritualized circle. In the spiral form, the circle, uncoiled, has ceased to be vicious; it has been set free”

Vladimir Nabokov

en función de z tiene que tener la convexidad hacia abajo. La ecuación según la componente angular da:

$$V \omega' + 2 V' \omega = f V / K \quad (5)$$

Se pueden satisfacer ambas (4) y (5) haciendo $\omega' = 0$, es decir, variación del ángulo horizontal θ de V con la altura uniforme, por tanto espiral equiangular, que quiere decir que a igual variación de z igual variación de θ . Con esto se anula el primer término de la izquierda de (5), y derivando (5) y sustituyendo en (4) se obtiene

$$\omega^2 = f / (2K) \quad (6)$$

$$V = A \exp(\omega z) \quad (7)$$

siendo A una constante a determinar por las condiciones de contorno. Como nota curiosa la ec. (5) con $\omega' = 0$ expresa el equilibrio entre la fuerza de Coriolis real del segundo miembro $f V / K$ y una pseudo-fuerza de Coriolis $2 V' \omega$ que aparecería al considerar un móvil moviéndose siguiendo la curva hodógrafa (es decir, tal que su vector de posición coincida en cada momento con V) con velocidad angular ω .

De la ec. (6) se deduce la conclusión importante de que hay dos posibles soluciones de la ec. (1), dependiendo del signo de la raíz de (6). Si $\omega > 0$ entonces (7) dice que V crece exponencialmente con la altura, si $\omega < 0$ V decrece exponencialmente con z . Por tanto, en el hemisferio norte, hay una espiral de Ekman creciente y de giro ciclónico con z y otra espiral de Ekman decreciente y de giro anticiclónico con z . Serán las condiciones de contorno del problema las que determinen el tipo de espiral.

La solución que Ekman encontró fue para el océano en que obviamente V debe crecer con la altura z , que en el océano es de signo opuesto a la profundidad $-z$, desde el inicio de la capa de Ekman hasta la superficie del océano donde el viento arrastra la capa superficial del agua. Por tanto se trata de la espiral creciente con giro ciclónico al crecer z (o disminuir la profundidad).

Atmósfera

Para la atmósfera hay que añadir a las dos fuerzas de fricción y Coriolis incluidas en (1) la fuerza del gradiente de presión, constante a lo largo del espesor de la capa. Esta fuerza del gradiente de presión se equilibra en la atmósfera libre con la de Coriolis debida al correspondiente viento geostrofico V_G al que tiende la velocidad del aire en la capa de Ekman. Pero es posible reducir el problema a la forma (1) sustituyendo V por $V -$

V_G ya que la fuerza del gradiente de presión es la misma que el término de Coriolis de V_G cambiado de signo, y obviamente al ser V_G una constante no modifica el término de fricción de (1). Por tanto tenemos que en la atmósfera la variable $V - V_G$ describe una espiral de Ekman. Las condiciones de contorno son ahora que V sea 0 en la superficie y que tienda al viento geostrofico en el límite superior, por tanto $V - V_G$ tiene que decrecer en módulo con la altura, y se trata de una espiral de Ekman decreciente con giro por tanto anticiclónico al aumentar z .

Transporte integrado en la columna

Una propiedad geométrica se deduce de que al ser $\omega' = 0$ como se vio, la ec. (5), habida cuenta de (6) queda $V' = \omega V$. Por tanto el ángulo entre la tangente a la hodógrafa V' y V tiene una tangente igual a $dV / (V d\theta) = (dV/dz) / (V d\theta/dz) = V' / \omega V = 1$. Por consiguiente la tangente a la curva hodógrafa forma siempre un ángulo de 45° con el vector velocidad.

En la superficie del océano la condición de contorno es que el arrastre debido al viento sea proporcional a la cizalla de la velocidad V' ; como la dirección de V' es la de la tangente a la hodógrafa que forma 45° con V concluimos que en la superficie del océano la velocidad del agua forma un ángulo de 45° con el viento.

Si queremos calcular el arrastre resultante a lo largo de toda la vertical de la espiral de Ekman debemos integrar, suponiendo densidad constante ρ , el flujo $\rho V dz$. Este cálculo es sencillo si usamos el hecho de que como hemos visto V' forma siempre un ángulo de 45° con V , y como su componente según la dirección de V vale ωV , el módulo de V' vale $2^{0.5} \omega V = (f/K)^{0.5} V$. Por tanto, la integral de $V' dz$ será igual a la de $V dz$ girada 45° y multiplicada por $(f/K)^{0.5}$. Como la integral de $V' dz = dV$ es inmediata tenemos finalmente, designando T el arrastre resultante a lo largo de toda la vertical:

$$T = \rho (K/f)^{0.5} \Delta V|_{45^\circ} \quad (8)$$

Donde $\Delta V|_{45^\circ}$ es la diferencia de los valores de V a lo largo de toda la capa girados 45° en sentido opuesto al giro desde V a V' .

Para el caso del océano el valor de V en $z=0$ es nulo, y en la superficie el vector velocidad está girado 45° respecto a V' según vimos, con lo que, tras añadir en sentido opuesto otro giro de 45° obtenemos el resultado conocido de que el transporte integrado a lo largo de toda la columna en el océano está girado hacia la derecha 90° respecto viento en superficie en el hemisferio norte.

Las consecuencias climáticas del transporte integrado en el océano de la capa de Ekman son muy importantes, siendo en esencia responsable de las diferencias climáticas entre las costas orientales y occidentales a la misma latitud de los

Aspectos de la dinámica de la espiral de Ekman

océanos. En las costas orientales de los océanos los vientos soplan en el hemisferio N/S predominantemente del norte/sur debido a los grandes centros anticiclónicos cuasi-estacionarios, lo que conduce a un transporte de Ekman en dirección perpendicular a la costa hacia el interior del océano. Debido a la conservación de la masa esta agua que escapa de la costa debe ser reemplazada por aguas profundas, fenómeno conocido por “upwelling” o surgencia. Estas son aguas frías comparadas con las superficiales, y habitualmente son ricas en nutrientes por lo que ejercen un efecto fertilizador sobre la vida marina. Naturalmente los efectos sobre las costas occidentales oceánicas son opuestos. Por último este transporte de Ekman, integrado a lo largo de los anticiclones oceánicos conduce a convergencia de masa hacia el centro, y esto provoca corrientes oceánicas geostroficas en el mismo sentido anticiclónico que los vientos en superficie.

Para la atmósfera no podemos suponer capa infinita a la hora de calcular el transporte, porque el transporte debido a la desviación geostrofica $\mathbf{V} - \mathbf{V}_g$, que vimos sigue una espiral de Ekman, converge como para el océano, pero el transporte del viento geostrofico constante en capa infinita lógicamente diverge, y daría un transporte neto infinito. Por tanto convencionalmente se toma el límite superior de la capa de Ekman atmosférica cuando el giro $\theta=180^\circ$, momento en que la desviación geostrofica es opuesta en dirección a la inicial (que vale $-\mathbf{V}_g$), y por tanto, están en la dirección del viento geostrofico, dando un viento total algo mayor que el geostrofico. El módulo de la desviación geostrofica en ese momento ha decrecido por un factor de $\exp(-\pi) = 4.3\%$ respecto al valor inicial.

Carácter de la fuerza de rozamiento

Las fuerzas de rozamiento que actúan sobre cada capa pueden tener direcciones y sentidos diversos; en este sentido cuando algunos libros de dinámica conocidos, como el de Holton, afirman, para explicar que en la capa de Ekman atmosférica hay una componente del transporte hacia las bajas presiones, que la fuerza de rozamiento es fundamentalmente una fuerza retardadora, esto en mi opinión puede prestarse a confusión. Si por retardadora entendemos opuesta a la velocidad de la capa, como se deduce del esquema de fuerzas que muestra el Holton, con la fuerza de rozamiento opuesta a la velocidad, esto en general no sucede. En la figura adjunta se muestra la dirección de la fuerza de rozamiento para un punto P de la capa de Ekman atmosférica. Esta fuerza está girada 90° respecto a la desviación geostrofica $\mathbf{V} -$

\mathbf{V}_g de acuerdo a la ecuación dinámica (1). En la figura la desviación geostrofica es QP, la velocidad \mathbf{V} es OP, y la fuerza de rozamiento se representa por la flecha naranja. El ángulo entre \mathbf{V} y la fuerza de rozamiento varía al ascender por la capa, vale de hecho 45° para puntos próximos a la superficie y es ortogonal a la velocidad para el punto final convencional de la espiral de Ekman cuando ha girado 180° . En el océano según (1) la fuerza de rozamiento siempre es puramente deflectora, ortogonal a \mathbf{V} , opuesta a la de Coriolis.

Simplicidad matemática

Se puede apreciar la simplicidad matemática de (1) si nos planteamos una ecuación diferencial que debe satisfacer una espiral que sea auto-similar, en el sentido de que en cualquiera de sus puntos la misma regla geométrica sirva para pasar al próximo punto, salvo un cambio de escala y un giro. Esta ecuación según esto debe relacionar la tangente \mathbf{V}' con \mathbf{V} sin término independiente, es decir, debe ser de la forma general:

$$\mathbf{V}' = \alpha \mathbf{V} + \beta \mathbf{V}_{90^\circ} \quad (9)$$

Con α y β constantes y \mathbf{V}_{90° el vector \mathbf{V} girado 90° . Como ya razonamos antes tanto α como β deben ser no nulos, so pena de degenerar en una figura recta ($\beta = 0$) o circular ($\alpha = 0$). Obviamente entre todas estas espirales auto-similares la más sencilla será aquella en que $\alpha = \beta$. En este caso \mathbf{V}' está a 45° de \mathbf{V} , por lo que derivando de nuevo \mathbf{V}'' estará a 90° de \mathbf{V} , y la ecuación de la espiral toma la sencilla forma de (1) con constantes adecuadas.

Referencias

- Ekman, V. W. 1905. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents. Arch. Math. Astron. Phys., 2, 1-52. [1]
- Holton, J., Hakim, G., 2003. An Introduction to Dynamic Meteorology, Academic Press, 2013. ISBN 9780123848666

