TURBULENCIAS, ATRACTORES Y CAOS EN METEOROLOGIA

Manuel Palomares Casado
Doctor en Ciencias Físicas. Meteorólogo

Resumen

Se comienza recordando los principales *Números adimensionales* que rigen los tránsitos de regímenes laminares a turbulentos para fluidos en general y particularmente el aire. Después, se mencionan influencias orográficas destacadas sobre determinadas circulaciones atmosféricas, haciendo resaltar los parámetros de mayor interés en sus estudios experimentales. Luego, se habla acerca de fundamentos de los *atractores,* con períodos crecientes, y del descubrimiento empírico de los dos *coeficientes escalares fundamentales* de *Feigenbaum,* los cuales pueden caracterizar la iniciación del *caos.* A continuación se citan importantes consecuencias de dicho descubrimiento y de la correspondiente propiedad universal, de nuevo cuño llamada *universalidad métrica,* así como de los nuevos conceptos de *atractores extraños.* Finalmente, se exponen los últimos conocimientos que sabemos acerca de los *movimientos caóticos,* con algunas conclusiones y posibles aplicaciones en física atmosférica y meteorología.

Antecedentes

En mi publicación "Estudio teórico de la inestabilidad del régimen laminar y del tránsito al régimen turbulento en distintos casos de dinámica de fluidos" —que fue resultado de la Tesis doctoral— abordé el estudio de distintas cuestiones referentes a dichos tipos de inestabilidad en la circulación horizontal de fluidos homogéneos e incomprensibles de pequeña viscosidad cuando no existen fuerzas exteriores. Hacía destacar la importancia de las correspondientes *capas limítrofes.* Trataba de la relación entre determinadas clases de perturbaciones fuera de estas capas con el tránsito de régimen laminar a turbulento en la circulación de esos fluidos por planos horizontales a lo largo de tuberías o canales con paredes lisas y sección transversal constante. Luego, estudiaba, en plan bidimensional, las influencias ejercidas por pequeñas convergencias o divergencias, en las paredes lisas de los conductos, sobre el grado de estabilidad del régimen laminar, especialmente en lo referente a la línea de separación entre el flujo central en el sentido inicial de la corriente y los flujos contrarios de las *capas limítrofes.* Finalmente, en los dos últimos capítulos, trataba sobre los efectos de ligeros encorvamientos de esas tuberías o canales en la estabilidad del flujo laminar y la aparición del régimen turbulento, primeramente en planos horizontales, dentro y fuera de las *capas limítrofes,* y después en plan tridimensional, considerando algunos casos particulares de especial interés. Continuamente, tenía que hacer intervenir distintas expresiones del célebre *Número de Reynolds* y diferentes «valores críticos» ligados a esos tránsitos de una a otra clase de circulaciones.

Después, en mi publicación "El análisis dimensional en aerotermodinámica subsónica", dedicaba un capítulo concretamente a la *turbulencia atmosférica,* distinguiendo sus tipos más conocidos. En primer lugar la puramente mecánica debida a los efectos de "cizalladura del aire", es decir a las variaciones de la velocidad del viento con la altura, por ejemplo, que empieza a manifestarse desde el momento que se alcanza un "valor crítico" del correspondiente *gradiente:*

$$\frac{\partial U}{\partial z} \qquad [1]$$

con lo cual este *parámetro* juega análogo papel al del *Número de Reynolds* Pero con la desventaja de no ser adimensional. Luego, hablaba sobre una turbulencia térmica, de tipo convectivo, que comienza a observarse desde que los valores del *gradiente* vertical de temperatura, con signo menos como es acostumbrado:

$$-\frac{\partial T}{\partial z} \qquad [2]$$

sobrepasan a los del *gradiente adiabático:*

$$-\frac{dT}{dz} \simeq -\frac{1^\circ\ C}{100m} \qquad [3]$$

y corresponde a las situaciones de inestabilidad térmica vertical, debidas, por ejemplo, a efectos locales de fuertes calentamientos del aire junto al suelo o por el contrario a enfriamientos en altura por causa de "gotas frías". Recordaba entonces la importancia práctica del *Número de Richardson,* que engloba los gradientes verticales citados y tiene diferentes expresiones, según se hagan intervenir, por ejemplo, densidades, entropías o temperaturas potenciales del aire, de manera que se han llegado a establecer diferentes "valores críticos" para dicho Número adimensional por encima de los cuales se amortiguan conjuntamente las turbulencias atmosféricas descritas.

Otros tipos de turbulencias atmosféricas —dinámicas y térmicas— decía que corresponden a las penetraciones de borrascas y particularmente de sus correspondientes frentes fríos, que suponen aumentos de vientos y de sus gradientes verticales, así como masas de aire con importantes inestabilidades térmicas verticales. También, hablaba de las "Ondas de Helmholtz", asociadas a fuertes cizalladuras del aire no sólo verticalmente, y sobre las "Ondas de relieve" debidas a los accidentes orográficos. Debo asimismo recordar que los distintos suelos respecto a altitudes, formas, orientaciones y naturalezas, engendran turbulencias, mecánicas y térmicas, con diferentes intensidades y escalas pero muy dignas de tenerse en cuenta. Decía también que una expresión útil del *Número de Reynolds* es:

$$Re = \frac{U\delta}{\nu} \qquad [4]$$

introduciendo como «longitud típica» el espesor δ de la capa limítrofe, y entonces el *Número de Richardson* se puede escribir aproximadamente en la forma

$$Ri \simeq \left(\frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{g\delta^3}{\nu^2}\right)\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^2 = (G\,r)\,(Re)^{-2} \qquad [5]$$

donde aparece como nueva expresión adimensional el *Número de Grashof:*

$$Gr = \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{g\delta^3}{\nu^2} \qquad [6]$$

Entonces los "valores críticos" del *Número de Richardson* como ocurre con los del *Número de Reynolds,* deben variar con la naturaleza del terreno y en particular con su "rugosidad".

Después, en la misma publicación, dentro del capítulo dedicado a *convección térmica,* hacía resaltar, por ejemplo, el interés del *Número de Rayleigh,* en estudios de movimientos convectivos celulares, por su intervención en muchas turbulencias, formaciones nubosas y tormentas. Puede escribirse también en la forma aproximada:

$$Ra \simeq -\frac{\Delta T \cdot g\alpha h^3}{k/c_p\rho \cdot \nu} \qquad [7]$$

donde ΔT indica, como en las fórmulas anteriores, la diferencia de temperaturas entre el suelo y el límite de la capa aérea considerada, con espesor h, g la aceleración de la gravedad, α el coeficiente de dilatación térmica, k la conductividad térmica, c_p el calor específico a presión constante, ρ la densidad y $\nu = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática, suponiendo valor medio constante para el gradiente vertical de temperatura en dicho capa. Entonces, hablaba de que si *Ra* es inferior a cierto "valor crítico" el equilibrio es estable y cualquier corriente convectiva incipiente resulta anulada por los efectos combinados de viscosidad y conducción.

También recordaba la expresión del conocido *Número de Prandtl:*

$$Pr \simeq \frac{\mu c_p}{k} \qquad [8]$$

siendo μ la viscosidad dinámica, de modo que se puede escribir:

$$Ra \simeq - (Pr) \cdot (Gr) \qquad [9]$$

Ahora bien, ese *Número Pr* para los gases es prácticamente independiente de la temperatura y de la presión, teniendo en el caso del aire como valor aproximado 0,7, luego:

$$Ra \simeq -0{,}7 \cdot (Gr) \qquad [10]$$

de manera que resulta indiferente manejar *Ra* o bien *Gr,* con sus correspondientes valores críticos, en los problemas de convección y turbulencia térmica citados. Asimismo, debo ahora decir que en el mismo capítulo de mi citada publicación mencionaba al *Número de Strouhal:*

$$Str = \frac{U}{rn} \qquad [11]$$

que puede ser útil en estudios de torbellinos estacionarios formados con vientos débiles de velocidad media U a barlovento y sotavento de ciertas elevaciones aisladas del terreno, como se hace al considerar, por ejemplo, los "Remolinos de Von Karman", donde *n* expresa la frecuencia con que se forman y *r* el radio medio de las secciones horizontales correspondientes a dichas elevaciones.

En fin, el último capítulo lo dedicaba a los fenómenos de *difusión* que, dejando a un lado la debida a la agitación molecular —analóga a la conducción térmica— puede ser *difusión libre,* por diferencias de densidad ligadas a cambios de concentración, *difusión térmica* a causa de variaciones de temperatura, o *difusión forzada,* que entraña movimientos producidos por causas independientes de esas diferencias, lo cual corresponde a la convección forzada del calor considerada en la misma publicación. Pues bien, esta *difusión forzada* también puede ser *laminar* o *turbulenta* y está regida por leyes análogas a las que gobiernan una u otra clase de convección térmica, existiendo asimismo "capas limítrofes de difusión", similares a las dinámicas o térmicas. Todas las mencionadas difusiones tienen interés en meteorología, primeramente por sus posibles aplicaciones al vapor de agua —según analizo particularmente en mi publicación— pero también a las dispersiones de gotas, cristales de hielo y núcleos de condensación, sublimación o congelación. Además, hay que tener en cuenta las difusiones de contaminantes y microorganismos, o bien de iones y partículas de arena, por ejemplo, a las cuales afectan no sólo vientos y movimientos convectivos, sino turbulencias del aire.

Por otra parte, en mi publicación "La meteorología en el turismo de alta montaña", dedico un último capítulo a resumir aplicaciones del análisis dimensional a problemas meteorológicos que exigen discriminaciones espaciales. Además, considerando que en la atmósfera los movimientos, los intercambios de calor y los fenómenos de difusión suelen ser turbulentos, se hallan nuevas formas de *monomios sin dimensiones* con posible interés en estudios experimentales, relacionándolos con otros conocidos y ya empleados prácticamente. Así, en lugar de los componentes del *Tensor de viscosidad dinámica* ν, debemos emplear los componentes del *Tensor de rozamiento turbulento;* en lugar del *Coeficiente de conductividad térmica* k, el de *intercambio de calor por turbulencia,* y en vez del *Coeficiente de difusión molecular* del vapor de agua u otras materias 7, el *Coeficiente de intercambio por turbulencia.*

Influencias orográficas

En una publicación de *Akira Kasahara* acerca de "Influencias orográficas sobre la circulación general atmosférica", se hace resaltar la importancia, al estudiar teórica y experimentalmente estas influencias, del *Número de Rossby:*

$$Ro = \frac{U}{fL} \qquad [12]$$

y del *Número de Ekman:*

$$E = \frac{\nu}{fD^2} \qquad [13]$$

en los cuales U representa una velocidad característica, f el *Parámetro de Coriolís,* L una longitud horizontal, ν el coeficiente de viscosidad cinemática, y D un espesor del fluido. Por cierto, que del primero de esos *Números* adimensionales ya hablaba yo en la segunda de mis publicaciones citadas recordando que *Exner* lo había introducido para estudiar experimentalmente ciclones y "gotas de aire ártico". Más adelante, *Kasahara* hace intervenir un parámetro S para representar los tipos de estratificaciones verticales del aire, el cual para tener carácter adimensional opino que debe escribirse en la forma:

$$S = gD \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z} \Big/ f^2L \qquad [14]$$

donde g es la aceleración de la gravedad, θ la temperatura potencial y $\partial\theta/\partial z$ su variación vertical.

Pues bien, recordando una de las expresiones más conocidas del *Número de Richardson:*

$$Ri = \frac{g}{\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z} \Big/ \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \qquad [15]$$

se puede escribir para S:

$$S = \frac{D}{f^2L} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \cdot (Ri) \qquad [16]$$

Por tanto, se podrían emplear indistintamente los valores de S o de Ri para determinar, por ejemplo, los órdenes y grados de estratificación vertical del aire, o fluido considerado, que serán inestables con valores negativos, neutrales con valores nulos y estables con valores positivos, puesto que son positivos los factores del *Número* Ri que figuran en [16]. Entonces, se mantienen los mismos criterios cualitativos, para conocer esos tipos de estratificaciones, aunque varíen los cuantitativos según los valores del "factor de forma" D/L, de la latitud, a través de f^2, y de la cizalladura

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2.$$

Taylor y Gent, han publicado un trabajo sobre "modificación de la capa límite por la orografía", haciendo consideraciones de escalas y parámetros con referencia a flujos estacionarios de aire sobre colinas o cordilleras. Por ejemplo, para anchuras L y alturas h de las mismas, con rugosidad z_o uniforme, comprobaron que los parámentros que controlan dichos flujos, y particularmente sus ondas a sotavento, son las formas de los mencionados obstáculos orográficos, y particularmente sus pendientes, medidas por h/L, además de la relación L/Z_o. Ahora bien, cuando a dichos obstáculos corresponden valores de L con órdenes de magnitud superiores al kilómetro, dicen que deben tenerse en cuenta los "efectos de Coriolís" y por tanto del *Número de Rossby* con la forma:

$$Ro = \frac{|U_g|}{fz_o} \qquad [17]$$

donde $|U_g|$ es el módulo del viento geostrófico.

En la misma publicación, *Taylor* considera los efectos de las presiones hidrostáticas sobre los cambios de flujo para casos de estratificaciones neutrales y capas límites planetarias formadas por dos subcapas con espesores h_1 y h_2. Así, llamando θ a la temperatura potencial media de la subcapa superior, supuesta constante, y $\Delta\theta$ a la diferencia entre dicha temperatura potencial y la del aire superficial, introduce el parámetro adimensional:

$$Rt = \frac{U^2\theta}{gh_1 \cdot \Delta\theta} \cdot \frac{h_2}{L} \qquad [18]$$

Este parámetro se observa que puede escribirse en función de un *Número de Froude:*

$$\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{g l_1} \qquad [19]$$

del que hablaba yo, por ejemplo, en mi segunda publicación citada, ya que:

$$\mathrm{Rt} = \frac{\theta}{\Delta\theta} \cdot \frac{h_2}{h_1} \cdot (\mathrm{Fr}) \qquad [20]$$

Entonces, dice *Taylor,* que para Rt $\gg$ 1 pueden ignorarse los efectos térmicos, mientras que para Rt $\ll$ 1 estos efectos serán los dominantes.

Baines y *Davies* han publicado un resumen de sus estudios de laboratorio sobre efectos topográficos en fluidos, primeramente estratificados, después giratorios y en tercer lugar giratorios y estratificados a la vez. Para los primeros consideran efectos de la viscosidad suficientemente pequeños, lo cual implica que el correspondiente *Número de Reynolds,* Re, sea superior a *100.* En los segundos tipos introducen el *Número de Rossby,* Ro, y el *Número de Ekman,* E, de manera que:

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{Ro}}{\mathrm{E}} \qquad [21]$$

si recordamos las expresiones de estos dos últimos parámetros adimesionales.

Para flujos estratificados no giratorios, tratan primeramente de aquellos formados por una sola capa, y entonces introducen los siguientes parámentros adimensionales:

$$\frac{U_o}{\sqrt{g d_o}} \qquad [22]$$

$$H = \frac{h}{d_o} \qquad [23]$$

en los cuales U_o es la velocidad horizontal del fluido y d_o su espesor, antes de llegar al obstáculo, y h la altura máxima del mismo, pudiendo observarse que el parámetro [22] no es más que la raíz cuadrada de un *Número de Froude,* Fr. Pues bien, varios investigadores han estudiado teóricamente estos tipos de flujos, considerando como "condición crítica":

$$(\mathrm{Fr})^{1/2} = \frac{U}{\sqrt{gd}} = 1 \qquad [24]$$

sobre la cresta del obstáculo, de manera que a $(\mathrm{Fr})^{1/2} > 1$ corresponden *flujos supercríticos,* y a $(\mathrm{sFr})^{1/2} <$ *flujos subcríticos,* incluyéndose diferentes curvas resultantes de representar en ordenadas valores de estos parámetros adimensionales y en abscisas de $H = h/d_o$/

Para flujos giratorios, *Baines* y *Davies,* llamando también h a la altura máxima del obstáculo y D al espesor del fluido, introdujeron en sus estudios como parámetro adimensional un *Número de Ekman:*

$$\mathrm{E} = \frac{\nu}{2\Omega L^2} \qquad [25]$$

y un *Número de Rossby:*

$$\mathrm{Ro} = \frac{U}{2\Omega L} \qquad [26]$$

donde, como siempre, ν es la viscosidad cinemática, Ω la velocidad de rotación característica, y L y U longitudes y velocidades horizontales típicas respectivamente. Entonces, también ahora la razón entre dichos parámetros es el familiar *Número de Reynolds:*

$$\frac{\mathrm{Ro}}{\mathrm{E}} = \frac{LU}{\nu} = \mathrm{Re} \qquad [27]$$

En tercer lugar se consideran flujos estratificados y giratorios conjuntamente. Así, *Davies* empleó un dispositivo por el cual se remolcaba un obstáculo esférico a través de un recipiente giratorio lleno de fluido con sal estratificada, haciendo mediciones sobre los componentes vertical y horizontal de las perturbaciones a diferentes niveles, para distintos valores del *parámetro adimensional:*

$$\frac{N}{2\Omega} \qquad [28]$$

con Ω velocidad de rotación y N la llamada *Frecuencia de Brunt-Vaisala* definida por la fórmula:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \qquad [29]$$

siendo g la aceleración de la gravedad y $\partial \rho/\partial z$ el gradiente de densidad supuesto lineal. Pues bien, se observa que ese nuevo parámetro adimensional puede escribirse en función del *Número de Rossby,* según su expresión [26], y de un *Número de Strouhal* en la forma:

$$Str = \frac{U}{LN} \qquad [30]$$

es decir:

$$\frac{N}{2\Omega} = (Ro) \cdot (Str)^{-1} \qquad [31]$$

Por último, debo recordar, dentro de este capítulo, el tabajo de *Gjevic* acerca de "efectos orográficos a mesoescala revelados por fotos de satélites". En él se exponen resultados de observaciones sobre trazas o estelas de remolinos aéreos a sotavento de una isla, por ejemplo la de *Jan Mayen,* donde se hacen resaltar valores de un *Número de Strouhal* en su forma inversa:

$$(Str)^{-1} = \frac{nd}{U} \qquad [32]$$

siendo U la velocidad del viento a 850 milibares, *d* el diámetro de la isla en sentido normal a dicha corriente, y *n* la frecuencia con que se forman los remolinos, sensiblemente proporcional a la mencionada velocidad.

Después, *Gjevic* expone diversos experimentos de laboratorio, relacionados con estelas de remolinos atmosféricos observadas, por ejemplo, a sotavento de las Islas de Canarias y de Madeira, remolcando obstáculos esféricos horizontalmente a través de fluidos estratificados, y observando las correspondientes estructuras de estelas para diferentes valores del *número de Reynolds:*

$$Re = \frac{Ud}{\nu} \qquad [33]$$

y del *Número de Strouhal:*

$$Str = \frac{U}{dN} \qquad [34]$$

en los cuales, *U* es la velocidad con que se realiza dicho remolque, *d* el diámetro de la esfera remolcada, ν la viscosidad cinemática del fluido, y *N* la "frecuencia de Vaisala-Brunt".

Fundamentos sobre atractores

En la publicación "Temas metamágicos", su autor *Douglas R. Hofstadter* encabeza el trabajo diciendo que "los atractores extraños son configuraciones matemáticas en equilibrio entre orden y caos". Pero para remontarse hasta el concepto de *atractor extraño* examina antes la noción de *atractor,* explicando que toda la "teoría de atractores" se inspira en la literación de funciones de variable real, es decir en el comportamiento de sucesiones:

$$x,\ f(x),\ f[f(x)],\ f[f[f(x\ 0]],\ \ldots, \qquad [35]$$

siendo f alguna función interesante. Así, llamando al valor inicial de x "semilla", se "reinyecta" la salida de f, utilizándola una y otra vez como nuevo valor de entrada, con la intención de observar si se presenta alguna regularidad.

Después, considera como ejemplo particularmente interesante el de la ecuación:

$$y \simeq 4\,\lambda x(1 - x) \qquad [36]$$

correspondiente a un arco parabólico, donde λ representa un parámetro comprendido entre 0 y 1, admitiendo solamente entradas (es decir, valores de x) comprendidos también entre 0 y 1, con lo cual la salida y se encuentra siempre entre los mismos valores. Por consiguiente, dice que el valor de salida puede ser "reinyectado" como valor de entrada en la función, asegurando de esta forma la posibilidad de iteración indefinida. Resulta entonces curioso que cuando λ es inferior a un cierto *valor crítico:*

$$\lambda_c \simeq 0{,}892\ldots \qquad [37]$$

todas las curvas tienen puntos regulares, pero cuando λ rebasa dicho valor la sucesión de

$$x,\ f(x),\ f[f(x)],\ \ldots \qquad [38]$$

irá oscilando de forma caótica, independientemente de la "semilla" (comprendida entre 0 y 1) que se decida "sembrar". Pues bien, diversos investigadores han descubierto este importante papel de λ, no sólo en las parábolas, sino también en muchas otras funciones, hecho que se ha llamado *propiedad de universalidad estructural.*

A continuación, *Hofstadter* describe los procesos de iteración tomando al azar una "semilla", por ejemplo 0,04, para llegar gráficamente a un *punto fijo* cuyas coordenadas x e y son ambas iguales a un valor que llama x* con acercamientos graduales a él. Por ello, afirma que dicho *punto fijo* es de un tipo especial ya que atrae hacia sí a los valores iterados de f(x) y es el *atractor* de tipo más sencillo el cual recibe el nombre de "punto fijo estable". Ahora bien, se ha observado que es precisamente la inclinación local de la curva lo que controla la amplitud del desplazamiento horizontal en cada iteración de f. Así, siempre que la pendiente de esta curva exceda de 45 grados (tanto si el tramo es ascendente como descendente) cada iteración tenderá a irnos alejando más y más del punto de partida. Por tanto, el criterio de estabilidad señala: para que un punto fijo sea estable, la inclinación de la curva en él ha de ser inferior a 45 grados. Esto precisamente es lo que sucede cuando $\lambda = 0,7$. Entonces, en el punto x*, la pendiente es de unos 41 grados, mientras que en x = 0 es mucho mayor de 45 grados.

Al aumentar λ, el emplazamiento de x* cambia y al mismo tiempo aumenta la pendiente de f en dicho punto, la cual alcanza 45 grados cuando $\lambda = 0,75$. A este valor particular lo llama Λ_1. Tomando ahora como "semilla" 0,04, igual que antes, se observa que al principio los valores de x van dirigiéndose a la vecindad de x* (que sigue siendo *punto fijo* de f, aunque ahora inestable), pero después el proceso de iteración va describiendo una espiral cada vez algo más amplia, que tiende suavemente a estabilizarse en una especie de baile cuadrangular convergente hacia dos valores especiales x^*_1 y x^*_2. Esta oscilación se llama de *ciclo-2,* y el par de valores que lo definen (x^*_1 y x^*_2) siguen formando un *sistema atractor* (o más brevemente un *atractor*) pero ahora con período dos. Luego un atractor de período 1 puede convertirse en otro de período 2 al trasponer λ el *valor umbral* 0,75, a partir del cual el punto x* se escinde en dos valores oscilantes, x^*_1 y x^*_2, de manera que conforme λ aumentaban separándose y alejándose más y más.

El autor ha considerado también la gráfica de una nueva función iterada de f:

$$g(x) = f[f(x)] \qquad [39]$$

la cual tiene dos nuevos *puntos fijos:*

$$x^*_1 = g(x^*_1), \qquad x^*_2 = g(x^*_2) \qquad [40]$$

El aumento de valor de λ es también causa de que la pendiente de g en sus dos puntos fijos estables vaya creciendo progresivamente, hasta que al fin —como le sucedió a su progenitora f— llegue a su punto de ruptura (cuando su pendiente en los puntos x^*_1 y x^*_2 rebase los 45 grados) y cada uno de sus puntos de atracción se divida en otros dos, generando así su propio *ciclo-2 local.* Entonces, con respecto a f los nuevos puntos son elementos de un *atractor de período 4.* El correspondiente valor de λ se llama Λ_2 y su valor es 0,86.

Para una cierta posición con un valor Λ_3, los cuatro puntos del atractor de f se dividirán simultáneamente, produciendo un *atractor periódico constituido por ocho puntos,* y a partir de ahí esta conducta irá repitiéndose una y otra vez, duplicándose y reduplicándose los puntos del atractor cada vez que se se alcanzan y rebasan ciertos *valores umbrales* de λ, y así sucesivamente. Pues bien, todos los valores de Λ convergen hacia un *valor crítico* aproximadamente igual al de [37]. Y se dice que su convergencia es de notoria regularidad, en el sentido de que la distancia entre sucesivos valores de Λ se contrae en progresión geométrica. Con mayor precisición, la razón:

$$\frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n} \qquad [41]$$

tiende hacia un límite finito:

$$\delta \simeq 4{,}6692... \qquad [42]$$

llamado *Número de Feigenbaum* en recuerdo de su descubridor. Además, se había encontrado otro *Número de Feigenbaum:*

$$\alpha \simeq 2{,}5029... \qquad [43]$$

de manera que la distancia entre cada dos nuevos puntos gemelos deberá ser α veces menor que la distancia entre su generador y el generador de este cumpliéndose ello cada vez más exactamente al ir creciendo el valor de n.

En resumen —afirma *Hofstadter*— conforme λ va aproximándose a λ_c, para valores especiales de λ predichos por la *constante* δ de Feigenbaum, la oblación del atractor asociado a f se duplica y sus cada vez más numerosos elementos quedan situados sobre el eje x conforme a un plan recurrente sencillo, cuyo principal parámetro determinante es la otra *constante de Feigenbaum,* α. Pero asimismo, este científico descubrió que sus números α y δ no dependían en realidad de la forma concreta que tuviera la curva definida por f(x). Así, casi todas las curvas lisas convexas que alcancen sus cimas a la misma alturas que la cima de la parábola sirven perfectamente, por ejemplo, las curvas sinusoidales. Ello le hizo sospechar que estaba ocurriendo algo de carácter universal, de manera que lo realmente importante era la "naturaleza" de la cima correspondiente a la curva considerada. Efectivamente —dice *Hofstader*— que este descubrimiento empírico de *Feigenbaum,* donde aparecen dos coeficientes escalares fundamentales α y δ, los cuales caracterizan la formación del caos tras ir pasando por una sucesión de atractores, cada uno de período doble al de su predecesor, es manifestación de una propiedad universal de nuevo cuño, conocida como ***universalidad métrica,*** para distinguirla de la ***universalidad estructural*** anteriormente conocida.

Consecuencias y atractores extraños

En la misma publicación, dice textualmente *Hofstadter,* que el descubrimiento de que las *constantes de Feigenbaum* no sólo se presentaban en atildados sistemas matemáticos, sino también en sistemas físicos donde se manifestaban embrollados fenómenos de turbulencia, fue todo un acontecimiento. Primeramente, *Valter Franceschini,* de la Universidad de Módena (Italia), adaptó la *ecuación* de *Navier-Stokes,* transformándola en un sistema de cinco ecuaciones diferenciales acopladas para poderlas estudiar numéricamente con su ordenador, descubriendo que el sistema mostraba *atractores* cuyos períodos iban duplicándose conforme sus parámetros se acercaban a los valores donde se esperaba que surgiera el régimen turbulento. Además, *Franceschini,* por sugerencia de *Jean-Pierre Exkmann,* de la Universidad de Ginebra (Suiza), determinó la razón de convergencia de los valores de λ con los cuales se producía la duplicación de esos períodos, y asombrosamente aparecieron los valores α y δ de *Feigenbaum* con precisiones de hasta cuatro decimales. Así por vez primera, un modelo matemático preciso de una turbulencia física reveló que su estructura estaba íntimamente relacionada con el «humilde caos» que subyace oculto en el sencillo arco parabólico de la ecuación [36].

Desde entonces —prosigue *Hofstadter*— los físicos experimentales han estado buscando sistemas físicos reales que manifiesten la caraterística propiedad de duplicación de períodos. Se han investigado, por ejemplo, ciertos tipos de *corrientes convectivas,* aunque las mediciones han sido demasiado imprecisas. Sin embargo, resulta fascinante la idea de que, en realidad, lo único que importa es la iteración de un sistema disipativo de relaciones recurrentes acopladas, y de que las propiedades de «detalle» de tales recurrencias puedan despreciarse plenamente si tan sólo nos interesa comprender la ruta que conduce al *régimen turbulento.*

Feigenbaum hace la siguiente exposición:

Es frecuente ver en el cielo formaciones de nubes extendiéndose de horizonte a horizonte.

Es obvio que tal formación no se ha producido "por accidente"; alguna ley de la mecánica de fluidos ha tenido que determinar la formación: Mas —prosigue *Feigenbaum*— tendrá que ser una ley que opere a nivel superior, a mayor escala, que la *ecuación de Navier-Stokes,* pues esta se ha deducido a partir de volúmenes infinitesimales de fluido y no de "pedazos grandes". Nos parece que para comprender estas bellas formaciones nubosas tendremos que superar el análisis de "detalle" y servirnos de procedimientos que "no hilen tan fino", pero que hagan destacar más claramente los rasgos esenciales del flujo hidrodinámico. El descubrimiento de que la iteración genera universalidad —es decir, proporciona resultados independientes de las propiedades de "detalle" de la función o funciones que se están iterando— alumbra la esperanza de que se pudiera estar en vías de hacer aflorar un procedimiento de ese tipo. (Yo quiero recordar aquí, a propósito de estas cuestiones, los cielos de "aspecto caótico", bastante frecuentes en muchas latitudes).

Por otra parte, opino que precisamente en algunas de las *influencias orográficas* sobre los tránsitos de regímenes laminares a turbulentos, para movimientos atmosféricos, que he mencionado, podrían ser de utilidad las ideas anteriores. Por ejemplo, se hizo resaltar el interés particular de ciertos valores críticos, en *Números adimensionales* conocidos, haciendo intervenir las alturas máximas de los obstáculos o las pendientes de sus laderas, a barlovento y sotavento, por secciones verticales de los mismos. Pero acabamos de hablar en el último capítulo sobre el valor crítico λ_c —expresado en [37]— sobre ciertos *valores umbrales* del parámetro λ, el cual representa la altura máxima de la curva considerada, y sobre las inclinaciones de la misma inferiores o superiores también al valor crítico de 45 grados, tanto en su rama ascendente como en la descendente. Se ha recordado también que los *Números de Feigenbaum* α y δ, no dependen realmente de la forma concreta de la curva considerada, sino de la altura de su cima, luego es muy probable que tenga utilidad la teoría expuesta sobre *atractores* al estudio experimentao, con modelos a escala y semejanza dinámica, de ciertas influencias orográficas cuando los correspondientes obstáculos tengan superficies fácilmente reproducibles y relativamente lisas es decir con "alturas de rugosidad" despreciables.

Sin embargo, además de los atractores mencionados se han observado *atractores extraños* de los cuales expone algún ejemplo *Hofstadter* diciendo literalmente que hoy nadie sabe por qué, cómo o cuando se podrán cosechar *atractores extraños* en los regímenes caóticos asociados a esquemas iterativos que representan sistemas físicos disipativos, pero sí parece cierto que ocupan lugar central en el misterioso fenómeno que llamamos turbulencia.

Posteriormente, *Carlos Pérez,* ha publicado un artículo titulado "Caos, azar y turbulencia", donde recuerda como ya *David Ruelle* y *Floris Takens,* en 1971, publicaron un trabajo en el que formulaban la teoría general de lo que llamaron *atractores extraños,* un caso particular de los cuales es el *atractor de Lorenz.* Se observaron cuando en sistemas que disipan la energía las trayectorias son "atraídas" hacia una región del espacio de fases, pero con extremada sensibilidad a las condiciones iniciales. Actualmente se emplean también para designar a dichos *atractores* los términos *atractores caóticos* o *atractores fractales.*

Dice luego *Carlos Pérez* que un comportamiento errático de unas trayectorias determinadas muy sensibles a las condiciones iniciales recibe el nombe de *caos.* Este *caos* es de naturaleza distinta a la turbulencia: esta es impredecible a corto plazo, mientras el *caos* lo es a largo plazo. También afirma que es diferente del comportamiento estocástico de las fluctuaciones, ya que el *caos* hace referencia a sistemas deterministas. Después, al preguntarse en el mismo artículo, si se encuentra este tipo de *caos* en la naturaleza, responde que experimentos muy recientes confirman su presencia en sistemas hidrodinámicos *(inestabilidad de Rayleigh-Benard* y *vórtices de Taylor),* en algunos modelos utilizados en climatología, etc., etc., siendo el *caos* un tipo de comportamiento común en la naturaleza. Y termina expresando la posibilidad de que dentro de poco la investigación sobre el *caos* permita también explicar la contradicción que existe entre la descripción mecanicista (reversible) y termodinámica (irreversible) del mundo material.

Movimientos caóticos y conclusiones

Más recientemente, el profesor *Fernández-Rañada,* ha publicado un artículo donde además de recoger y actualizar las principales ideas expuestas por *Hofstadter* —que he incluido anteriormente— expone los últimos conocimientos acerca de los *movimientos caóticos.* Así, empieza diciendo que la mayoría de los sistemas dinámicos deterministas tienen movimientos tan complejos, con sus trayectorias entrecruzándose de forma tan errática y turbulenta, que resulta imposible toda predicción detallada para tiempos grandes y extremadamente difícil su estudio. En esos casos se habla de *caos,* de comportamiento caótico, turbulento o estocástico. Su característica más importante —continúa diciendo— es la extremada sensibilidad de dichos movimientos a pequeñas variaciones en las posiciones iniciales, que son imposibles de eliminar, bien como resultado de inevitables imprecisiones en las medidas, bien debidas a necesarias aproximaciones en los métodos de cálculo. Se trata —debo recordar yo— de lo expuesto anteriormente en relación con los *atractores extraños* o *caóticos.* Luego, afirma *Fernández-Rañada,* como el descubrimiento de la *ubicuidad del caos* es, sin duda, la tercera gran revolución de la física del siglo XX, junto con las de la *relatividad* y la *teoría cuántica,* y como sus consecuencias son, en opinión de muchos, de trascendencia comparable a las de estas.

Después, creo interesante reproducir literalmente el siguiente ejemplo, precisamente de meteorología y expuesto por un científico que no es meteorólogo:

"Quienes elaboran los informes sobre el estado del tiempo son víctimas frecuentes del caos. Si se equivocan a veces no es por incompetencia, sino porque el movimiento de la atmósfera no es regular sino turbulento: pequeñas imprecisiones en los datos de las estaciones meteorológicas o, más importante aún, falta de datos ante un número insuficiente de ellos pueden hacer que resulte imposible la predicción má allá de algunas horas. Por ello, la meteorología impulsa hoy la construcción de supeordenadores para, mediante métodos numéricos de extrema complejidad, conseguir prolongar el tiempo de predicción segura. El llamado *efecto mariposa,* propuesto por *E. Lorenz,* describe de un modo hiperbólico el problema: un meteorólogo que consiguiera llegar a una determinación totalmente precisa del estado de la atmósfera en un cierto momento y resolver las complicadas ecuaciones que rigen su movimiento vería invalidado su trabajo por la pequeñísima perturbación producida por el imprevisto batir de las alas de una mariposa. Tomado al pie de la letra, esta afirmación es exagerada, pero ilustra de modo muy preciso, la raíz de la dificultad: la sensibilidad extrema a pequeños cambios". Incluso —pienso yo— que sobre todo dentro de ciertas especialidades, por ejemplo en meteorología aeronáutica, podría hablarse con menos exageración de los *efectos aeronaves,* aplicables particularmente a predicciones en aeropuertos, helipuertos y rutas de mucho tráfico aéreo.

Por último, *Fernández-Rañada,* escribe que las ideas expuestas pueden llevar, a comprender en qué consiste el *movimiento caótico,* diciendo textualmente que la mayoría de los sistemas dinámicos tienen trayectorias que no pueden calcularse para todo valor del tiempo mediante la iteración de un algoritmo finito y están, por tanto, fuera de la capacidad de una inteligencia humana. Como el sistema dinámico genérico tiene a la vez movimientos calculables e incalculables, la introducción de las probabilidades y el *dualismo determinismo-probabilismo* es una necesaria manifestación de la finitud del hombre en su lucha por conseguir una descripción matemática de la naturaleza.

Por mi parte, debo poner de relieve que en física atmosférica no hay realmente ninguna cantidad conservada más que la energía, pues los invariantes que se hacen intervenir en diversos modelos (véase, por ejemplo, mi publicación "Investigaciones y enseñanzas en física atmosférica y meteorología"), no son totalmente invariantes ni mucho menos. Entonces, aunque operemos con *sistemas hamiltonianos* (que tienen al menos una cantidad conservada, la energía) estamos lejos de las condiciones del *teorema de Liouville,* el cual afirma que si un sistema con *n* grados de libertad tiene no sólo una sino *n* cantidades conservadas independientemente (la energía y otras *n-1* más) su solución se puede obtener mediante cuadraturas. Nos encontramos, por consiguiente, con *sistemas ergódicos,* es decir que cumplen la *hipótesis ergódica,* propuesta por *Boltzman,* según la cual todos los movimientos de un sistema pasan arbitrariamente cerca de cualquiera de sus estados posibles si se espera un tiempo suficiente. Pero, además, los movimientos atmosféricos no son periódicos, pues sólo obedecen y parcialmente, a varios movimientos periódicos, sobre todo de la Tierra, el Sol y posiblemente la Luna, con lo cual sus pautas de evolución son mucho más complicadas que en los sistemas periódicos.

En definitiva, tenemos un sistema cuyas trayectorias son muy complejas y por ello es tan difícil hacer predicciones suficientemente fiables de ellas y naturalmente de sus consecuencias sobre la temperie que, además, depende muy estrechamente de los factores geofísicos locales. Sin embargo, debo decir finalmente, que, por ejemplo, en mi última publicación citada, incluyo un capítulo sobre "teoría de catástrofes", otro con "casos de física atmosférica y meteorología, discontinuidades y capas límites" y el siguiente sobre "desastres naturales, perturbaciones atmosféricas y meteoros violentos", algunas de cuyas ideas y posibles aplicaciones mencionadas podrían seguramente complementarse a través de los nuevos descubrimientos expuestos en relación con turbulencias, atractores y caos.

Bibliografía

BAINES, P. G., y DAVIES, P. A. (1980): "Orographic Effects in Planetary Flows". Chapter 8, GARP, Publications Series, 23, June.

FEIGENBAUM, M. J. (1980): "Universal behavior in nonlinear systems". Los Alamos Sciences, 4-27.

FERNÁNDEZ-RAÑADA, A. (1986): "Movimiento caótico". Investigación y Ciencia, 114, (Prensa Científica) Barcelona, marzo.

GJEVIC, B. (1980): "Orographic Effects in Planetary Flows". Chapter 9, GARP, Publications Series, 23, June.

HOFSTADTER, D. R. (1982): "Temas metamágicos". Investigación y Ciencia, 64, (Prensa Científica). Barcelona, enero.

KASAHARA, A. (1980): "Orographic Effects in Planetary Flows", Chapter 1, GARP, Publications Series, 23, June.

PALOMARES CASADO, M. (1954): "Estudio teórico de la inestabilidad del régimen laminar y del tránsito al régimen turbulento en distintos casos de dinámica de fluidos". revista de Geofísica, 51 y 52, Madrid.

PALOMARES CASADO, M. (1959): "El análisis dimensional en aerotermodinámica subsónica". LAS CIENCIAS, XXIV, 2, Madrid.

PALOMARES CASADO, M. (1982): "La meteorología en el turismo de alta montaña". GEOGRAPHICALIA, Zaragoza.

PALOMARES CASADO, M. (1984): "Investigaciones y enseñanzas en física atmosférica y meteorología". Publicación A-101, del Instituto Nacional de Meteorología, Madrid.

PÉREZ, CARLOS (1985): "Caos, azar y turbulencia". Investigación y Ciencia, 101, (Prensa Científica), Barcelona, febrero.

TAYLOR, P. A., and GENT, P. R. (1980): "Orographic Effects in Planetary Flows", Chapter 5, GARP, Publications Series, 23, June.