

Ondas gravitatorias troposféricas. Estudio de su estabilidad mediante modelos de capas

C. RAMIS y S. MONSERRAT

Grupo de Dinámica de Fluidos Geofísicos. Departament de Física.
Universitat de les Illes Balears. Palma de Mallorca. España

RESUMEN

Se presenta una breve revisión de las características de las ondas gravitatorias troposféricas y de una situación meteorológica favorable a la observación de oscilaciones rápidas de presión asociadas a estas ondas gravitatorias. Se presenta una deducción de la ecuación de Taylor-Goldstein, ecuación fundamental para el estudio de la influencia de la cizalladura vertical del viento sobre las ondas gravitatorias. A continuación se hace una revisión de los modelos de capas más importantes aparecidos en la literatura y se discuten brevemente las zonas de inestabilidad obtenidas resolviendo la ecuación de Taylor-Goldstein para cada uno de ellos.

1. INTRODUCCION

Las ondas en la atmósfera se producen por la existencia de fuerzas recuperadoras que actúan sobre las partículas de aire cuando éstas se separan de su posición de equilibrio. En una atmósfera en reposo o con movimiento uniforme y con estratificación estable, al desplazar verticalmente una partícula aparecen fuerzas recuperadoras de tipo arquimediano, debidas a la gravedad, que obligan a dicha partícula a regresar a su punto de partida. Al superarse por inercia dicho punto, el resultado final es una oscilación alrededor de la posición de equilibrio con una frecuencia que depende del grado de estabilidad y cuyo valor es

$$N = \left(\frac{g}{\theta_s} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

N recibe el nombre de frecuencia de Brunt-Väisälä, g es la aceleración de la gravedad, θ_s la temperatura potencial de la partícula y $\partial\theta/\partial z$, el gradiente vertical de la temperatura potencial en el medio ambiente (ver por ejemplo, Holton, 1979). Siguiendo a Thompson (1961) dichas ondas se clasificarían dentro del grupo de las transversales verticales.

Con ciertas distribuciones verticales de la velocidad del viento y la temperatura, las pequeñas perturbaciones, que siempre existen como consecuencia del propio flujo atmosférico, pueden llegar a amplificarse alcanzando amplitudes notables; dando lugar a perturbaciones significativas de períodos cortos en los campos de las variables meteorológicas. Es interesante, pues, conocer bajo qué circunstancias es posible esta inestabilización y cuáles serán las perturbaciones favorecidas.

Antes de continuar es conveniente un corto recordatorio de los tipos de ondas gravitatorias. En primer lugar debe distinguirse entre ondas internas y ondas superficiales. Estas últimas son las que se forman en la superficie libre de un fluido como, por ejemplo, las olas del mar. Las internas son las que se forman en el interior del fluido como son las ondas troposféricas o las ondas sobre la termoclina. Dentro de las ondas internas conviene distinguir entre ondas no atrapadas y evanescentes. Las ondas no atrapadas se propagan en la vertical a partir del nivel de formación y están caracterizadas por tener un número de ondas vertical imaginario. Las evanescentes, por el contrario, disminuyen rápidamente su amplitud al propagarse verticalmente a partir de su nivel de génesis y están caracterizadas por tener un número de ondas vertical real. Como veremos posteriormente, que una onda se comporte como no atrapada o como evanescente depende de su longitud de onda horizontal, de la estabilidad de estratificación del medio así como del perfil vertical del viento.

En los apartados siguientes vamos a considerar las ondas gravitatorias internas. En primer lugar se describen algunas de sus características, deducidas de la observación; se comenta una situación meteorológica que parece favorecer el desarrollo de las mismas, se presentan brevemente los mecanismos de generación y se señala el papel que juegan en la atmósfera. En la sección 2 se presenta el desarrollo teórico que, a través de la linealización de las ecuaciones, permite enfocar el estudio de dichas ondas.

Para resolver dichas ecuaciones es necesario conocer la distribución vertical de la temperatura y el viento. En la práctica es preciso simplificar de alguna manera estos perfiles verticales. Una forma consiste en aproximar las distribuciones verticales mediante funciones continuas para las cuales pueden encontrarse soluciones exactas o soluciones en series. Dichos modelos permiten poca flexibilidad a la hora de realizar alguna variación. La función más empleada para simular el perfil del viento es la tangente hiperbólica, perfil físicamente realístico y que da lugar a una ecuación de valores propios fácilmente interpretable (Lalas y Einaudi, 1976; Fritts, 1980). Otra opción es considerar la atmósfera formada por un número finito de capas cada una de las cuales está caracterizada por valores constantes de los parámetros que

aparecen como coeficientes de la ecuación y por tanto es posible obtener soluciones en la forma de combinación lineal de funciones exponenciales en cada una de las capas.

En la sección 3 y siguientes se describen algunos de los modelos de capas que han permitido simular la estructura vertical de la atmósfera y determinar las longitudes de onda inestables. Dichos modelos están destinados principalmente a estudiar las ondas producidas por cizalladura vertical, uno de los posibles mecanismos de generación, obteniéndose soluciones analíticas de las ecuaciones del movimiento. Tal vez cabría preguntarse cuál es el papel que juegan estos modelos analíticos en la actualidad cuando potentes ordenadores son capaces de resolver problemas numéricos de gran complejidad. La respuesta es que estos modelos sencillos son muy útiles para proporcionar una guía para la resolución de problemas numéricos más complicados y en definir dónde el tratamiento numérico debe ser más cuidadoso.

1.1. Observación y características

Desde la aparición de los barógrafos se conoce la existencia de oscilaciones de presión de período corto, muy inferior al correspondiente a las de origen sinóptico (5-6 días) e incluso al de la oscilación diurna (12 horas). Dichas oscilaciones, desde el principio, fueron asociadas a ondas gravitatorias (Johnson, 1929).

Todavía hoy los valores de la presión suministrados por microbarógrafos digitales de alta precisión y con capacidad de realizar lecturas e intervalos cortos de tiempo, constituyen la base fundamental del estudio de las características de las ondas gravitatorias. Redes de observación de tres microbarógrafos y/o sensores de viento permiten determinar velocidad de fase, período y longitud de onda, parámetros fundamentales para identificar el mecanismo de generación (Rees y Mobbs, 1989; Monserrat, 1991). La figura 1.1 muestra un registro de presión de un microbarógrafo de alta precisión correspondiente a un episodio de ondas gravitatorias en las islas Baleares. Dicho registro puede compararse con el de la figura 1.2 que corresponde al mismo caso, pero realizado con un barógrafo convencional como los normalmente usados en los observatorios de tipo sinóptico.

Los productos de los sensores remotos tanto pasivos como activos, satélite, radar Doppler, sodar, lidar, aportan información fundamental sobre la estructura de las ondas, especialmente sobre el nivel de formación y forma de propagación, pero un estudio completo precisa un sistema de observación en superficie de las características indicadas anteriormente y con una distribución espacial que sea adecuada a las ondas que se desea observar (DeMaria *et al.*, 1989).

Son numerosos los estudios sobre episodios de ondas gravitatorias en diferentes puntos del planeta y los mismos nos muestran un amplio espectro de sus características. Las longitudes de onda varían desde los 5 km (Gossard y Munk, 1954) hasta los 400-500 km (Uccellini, 1975; Uccellini y Koch, 1987,

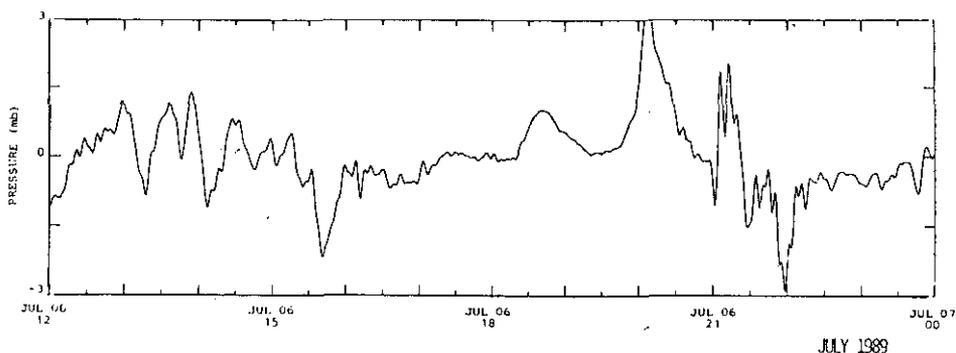


Figura 1.1.—Registro de presión de un microbarógrafo digital, correspondiente al 6 de julio de 1989 entre las 12 UTC y las 24 UTC, en Ciutadella (Menorca, islas Baleares). (Monserrat *et al.*, 1991 a.)

DeMaria *et al.*, 1989); los periodos desde los 5 minutos (Balachandran y Donn, 1964) a las 4 horas (Uccellini y Koch, 1987); las velocidades de fase desde los 10 m/s (Herron y Tolstoi, 1969) a los 50 m/s (Hooke y Hardy, 1975) y oscilaciones de presión desde 0.1 hPa (Gedzelman y Rilling, 1978) hasta 2-5 hPa (Bossart y Cussen, 1973), aunque pueden producirse oscilaciones singulares más grandes dentro de un tren de ondas. Los valores más representativos están entre los 10-30 km para la longitud de onda, los periodos 10-30 minutos y las velocidades entre los 10-50 m/s (Atkinson, 1981). Las escalas

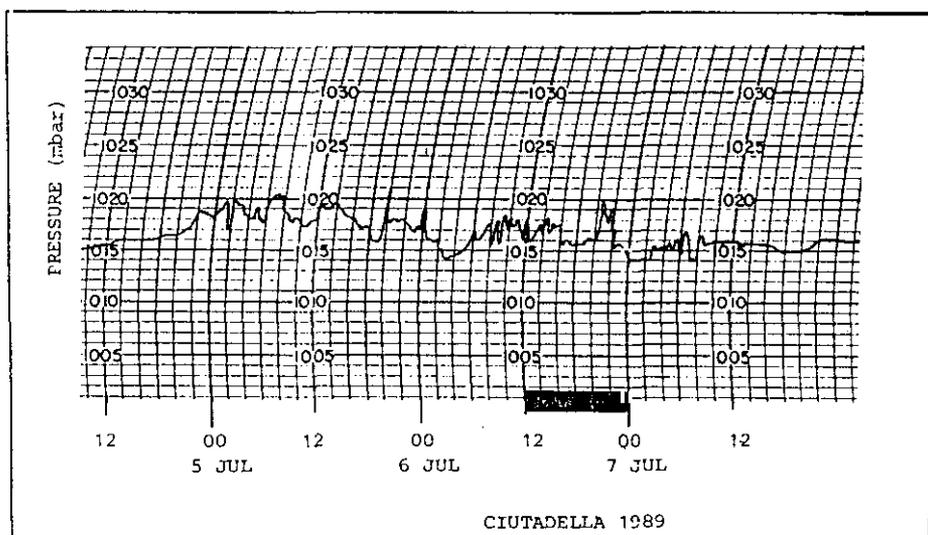


Figura 1.2.—Registro de presión de un barógrafo convencional correspondiente al mismo caso de la figura 1.1. La zona marcada corresponde al intervalo de tiempo mostrado en la figura 1.1.

temporales y espaciales de las ondas gravitatorias las encuadran dentro de los fenómenos mesoescalares, siguiendo la clasificación de Orlanski (1975).

1.2. Situación meteorológica

Los fenómenos mesoescalares y por tanto las ondas gravitatorias troposféricas, como tales, se presentan dentro de algún marco sinóptico que prepara un ambiente favorable para el desarrollo de fenómenos de escala menor.

Uccellini y Koch (1987) presentan una revisión de trece episodios de ondas gravitatorias en Estados Unidos, encontrando una situación meteorológica semejante en prácticamente todos ellos. Dicha situación sinóptica es muy parecida a la que se da sobre la península Ibérica y el Mediterráneo occidental cuando en las islas Baleares se observan oscilaciones importantes de presión de período corto (Ramis y Jansá, 1983, 1990; Monserrat *et al.*, 1991a).

La figura 1.3 muestra la situación meteorológica del día 6 de julio de 1989 a las 00 UTC con la cual se registraron las oscilaciones de presión presentadas en las figuras 1.1 y 1.2. Como puede observarse, a bajos niveles (850 hPa) existe una baroclinidad muy acusada y el flujo es débil. En la troposfera media y alta el flujo es del sur-oeste, más fuerte en la alta troposfera, alcanzando los valores mayores sobre la costa española mediterránea. Las islas Baleares están al este del eje de inflexión de las isohipsas cuando vamos desde el eje de la vaguada hacia el eje de la dorsal.

La estructura vertical de la atmósfera también presenta rasgos característicos y comunes en la mayoría de los casos estudiados. En la troposfera baja es frecuente la presencia de una capa muy estable, generalmente una inversión. En la troposfera media, estabilidad de estratificación débil junto con una fuerte cizalladura vertical del viento producida por un aumento de la velocidad más bien que por un cambio de dirección. Por esta razón, el número de Richardson

$$Ri = N^2 / \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (1.2)$$

toma valores bajos, generalmente inferiores a 0.5. Gedzelman y Rilling (1978) muestran la existencia de una cierta relación entre Ri y la amplitud de las ondas gravitatorias observadas en Palisades (N.Y.), de tal manera que la amplitud tiende a ser mayor cuanto menor es el número de Richardson mínimo. Significaremos aquí que para llevar a cabo un diagnóstico preciso es conveniente conocer la estructura vertical de la atmósfera con alta resolución.

Para que las ondas se propaguen a distancias largas debe existir algún mecanismo, semejante a una guía de ondas, que atrape la energía y la mantenga durante muchas oscilaciones. Dicha guía de ondas resulta altamente favorecida por la presencia de una inversión a bajos niveles y una capa con inestabilidad convectiva a niveles medios, haciendo el papel de capa reflec-

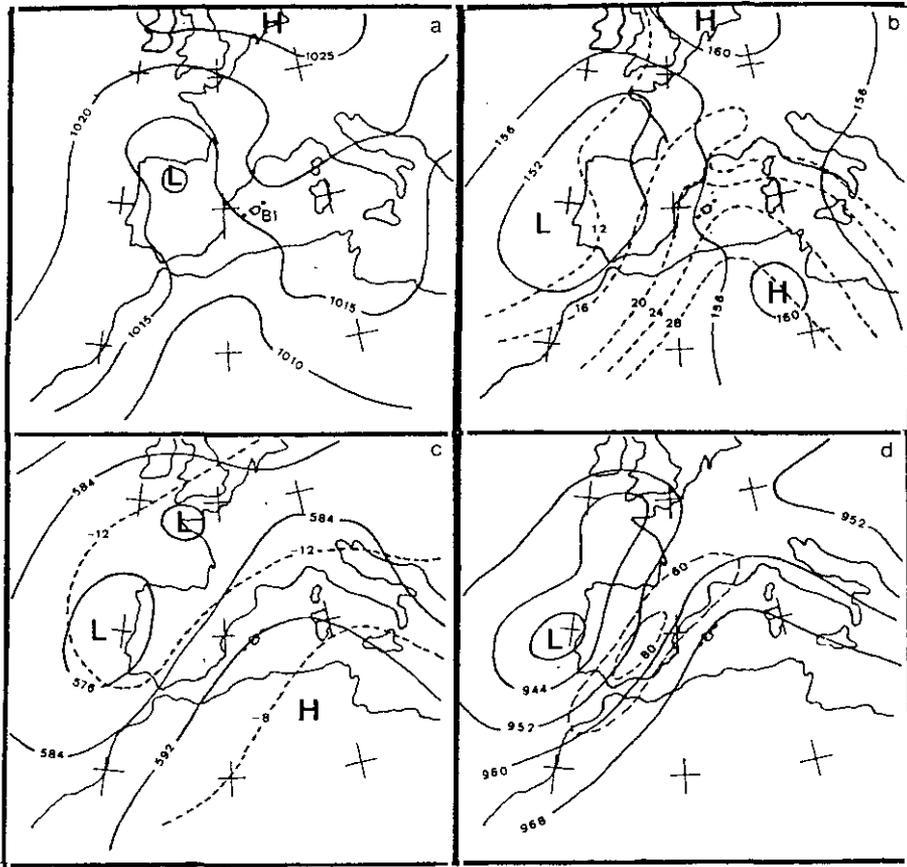


Figura 1.3.—Situación sinóptica correspondiente al 6 de julio de 1989 a las 00 UTC. a) superficie, b) 850 hPa, c) 500 hPa, d) 300 hPa. Las líneas continuas representan isobaras en superficie e isohipsas en las topografías. Las líneas a trazos representan isotermas excepto a 300 hPa que son isotacas (en *kt*). (Monserrat *et al.*, 1991 a.)

tora de la energía, siempre que la velocidad del viento en los niveles inferiores a esta capa no coincida con la velocidad de fase de las ondas, circunstancia que produciría una atenuación de la onda como han demostrado Lindzen y Tung (1976).

La figura 1.4 muestra la estructura vertical de la atmósfera en Palma de Mallorca durante el episodio de ondas gravitatorias presentado en la figura 1.1. Pueden observarse muchas de las características indicadas anteriormente.

1.3. Mecanismos de generación

Han sido varios los mecanismos propuestos como generadores de ondas gravitatorias. Entre ellos podemos considerar:

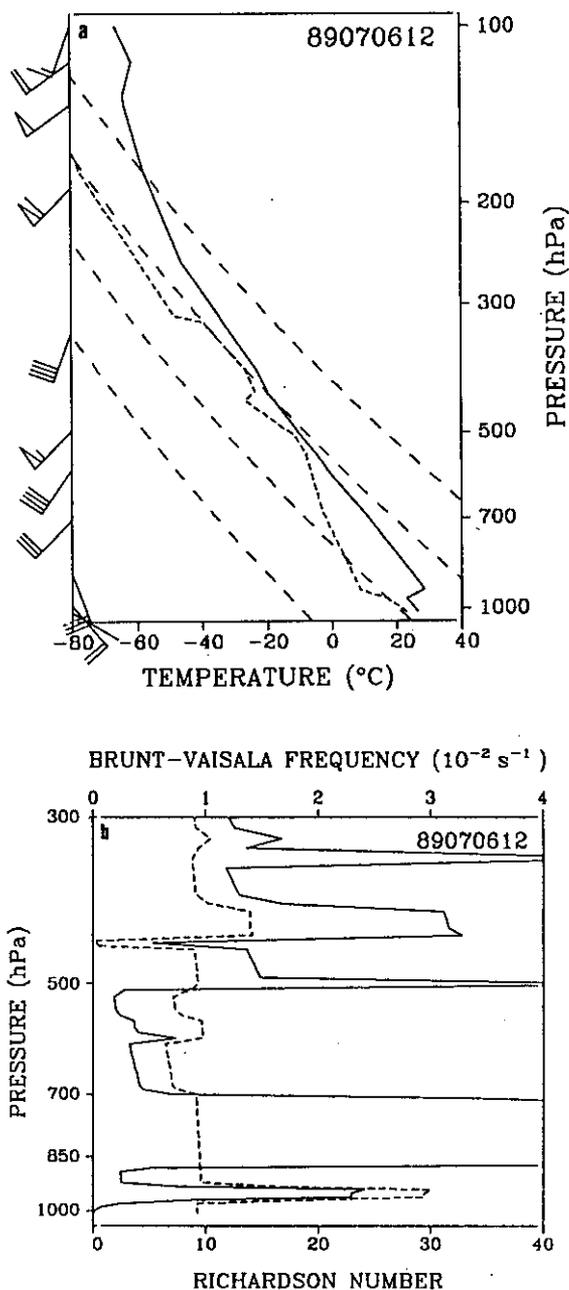


Figura 1.4.—Estructura vertical de la atmósfera en Palma de Mallorca correspondiente a la observación del 6 de julio de 1989 a las 12 UTC. a) Radiosondeo, b) Distribución vertical de Ri (línea continua) y N (línea de trazos).

a) *Orografía*. La perturbación producida por una cordillera sobre un flujo atmosférico que la remonta puede dar lugar a ondas a sotavento que pueden ser estacionarias o móviles. En este campo los esfuerzos se han concentrado en el estudio de las perturbaciones estacionarias, ya sea de forma analítica con perfiles suaves (Queney, 1948; Scorer y Klieforth, 1959) o mediante modelos numéricos mesoescalares (entre otros Klemp y Lilly, 1978; Richard *et al.*, 1989) para explicar los vientos fuertes observados en la ladera de sotavento.

b) *Sistemas frontales*. Fluctuaciones de presión en forma de ondas son frecuentemente registradas tras el paso de frentes asociados a perturbaciones sinópticas u otras circulaciones donde se observa un cambio brusco de la dirección y fuerza del viento, como líneas de turbonada o frentes de brisa (Williams, 1953; Donn *et al.*, 1954; Williams y Hori, 1970; Gall *et al.*, 1988). La estructura de las ondas en frentes fríos ha sido estudiada recientemente en el programa Fronts-87 (Samah, 1990).

c) *Convección*. La convección que se produce en presencia de una capa estable a bajos niveles puede dar lugar a oscilaciones en dicha capa como consecuencia del desplazamiento que la corriente ascendente produce sobre el medio ambiente. Los estudios sobre este mecanismo son numerosos, entre ellos Deardof (1969), Jordan (1972), Uccellini (1975), Balachandran (1980).

d) *Ajuste geostrófico*. El flujo atmosférico a gran escala es geostrófico o casi geostrófico. Rossby (1938) demostró que cuando un flujo no cumple la condición de geostrofia, tiende a ajustarse a ella, irradiando en dicho proceso ondas inercio-gravitatorias. Dicho mecanismo ha sido considerado eficiente en la zona de salida de un jet-streak e incluso asociado a estructuras sinópticas características (Uccellini y Koch, 1987), pero no ha sido ampliamente desarrollado.

e) *Inestabilidad por cizalladura*. Determinados perfiles de viento y temperatura permiten que las pequeñas perturbaciones que se producen por turbulencia, en el nivel donde la cizalladura vertical del viento es fuerte y la estabilidad de estratificación débil, crezcan y den perturbaciones significativas en el campo de la presión. Es quizá el mecanismo más estudiado y al que prestaremos atención en las secciones siguientes. Son muchos los trabajos que atribuyen este origen a las ondas observadas, entre ellos Gedzelman y Rilling (1978), Balachandran (1980), Stobie *et al.* (1983), Pecnick y Young (1984), Koch y Dorian (1988).

Algunos autores consideran las interacciones lineales entre ondas como otro mecanismo de generación (véase Hooke, 1986).

1.4. Importancia de las ondas gravitatorias en la atmósfera

Las ondas gravitatorias influyen sobre cada una de las variables meteorológicas, velocidad del viento, temperatura, presión, humedad, etc., modulándolas. Sin embargo, desde el punto de vista dinámico su importancia es mucho mayor y podríamos citar su acción sobre:

a) *Transferencia de energía entre escalas.* La transferencia de energía desde escalas grandes a pequeñas es llevada a cabo por las ondas gravitatorias y constituye un proceso fundamental que los modelos numéricos deben tener en cuenta en la parametrización de los procesos subreticulares (Hooke, 1986). Existen sugerencias de que en ciertas circunstancias tal transferencia puede estar dirigida en sentido contrario (Chimonas y Grant, 1984).

b) *Transporte vertical de momento y energía.* Este parece un proceso en el cual las ondas gravitatorias juegan un papel fundamental. Aunque muchas longitudes de onda son evanescentes y su energía está atrapada en el nivel de formación, las que pueden propagarse libremente transportan hasta el 25 % de la energía que recibe la termosfera (Hooke, 1986).

c) *Generación de turbulencia en aire claro (TAC).* La turbulencia en zonas presumiblemente estables que afectan a los aviones en alturas de crucero son producidas por ondas gravitatorias. Es importante, por lo tanto, en la predicción aeronáutica la localización de las zonas con probabilidad de formación de dichas ondas.

d) *Disparo de la convección.* El disparo de la convección por ondas gravitatorias en situaciones de inestabilidad convectiva parece un hecho probado. Uccellini (1975) y Stobie *et al.* (1983) presentan sendos estudios sobre el desarrollo de supercélulas por ondas gravitatorias. Koch *et al.* (1988) atribuyen la formación de un Complejo Convectivo de Mesoescala a un tren de ondas gravitatorias.

e) *Generación de perturbaciones sobre la superficie del océano.* El forzamiento producido por las perturbaciones meteorológicas mesoescalares sobre la superficie del océano es un mecanismo efectivo para explicar perturbaciones variables de pequeña escala observadas sobre la misma (Orlanski y Polinski, 1983). Las ondas gravitatorias han sido consideradas como las generadoras del forzamiento que da lugar a las oscilaciones espectaculares del nivel del mar en el puerto de Ciutadella (Menorca) (Ramis y Jansà, 1983; Tintoré *et al.*, 1988; Monserrat *et al.*, 1991b).

2. ECUACION DE TAYLOR-GOLDSTEIN

Todos los trabajos sobre el efecto de la cizalladura vertical del viento sobre las ondas gravitatorias atmosféricas usan alguna versión de la ecuación deducida por Taylor y Goldstein de manera separada en 1931. Desde entonces esta ecuación es conocida como la ecuación de Taylor-Goldstein. En ella se proporciona una expresión para la perturbación de la velocidad vertical en términos de los perfiles verticales de temperatura y viento.

La ecuación de Taylor-Goldstein se deduce de las ecuaciones primitivas del movimiento previamente linealizadas, considerando un fluido no ionizado en movimiento bidimensional (podemos elegir el plano x - z como el plano de propagación), sin turbulencia, sin viscosidad, y despreciando los efectos de la rotación de la Tierra.

Las dos ecuaciones del movimiento bidimensional, la ecuación de continuidad y la ecuación de la conservación de la energía previamente linealizadas pueden escribirse:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u_0}{z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0 \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p'}{\partial x} + w' \frac{\partial p_0}{\partial z} = c_s^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

donde u' , w' y p' son las cantidades perturbadas definidas por las expresiones

$$u = u_0 + u' \quad w = w_0 + w' \quad p = p_0 + p'$$

y las cantidades u_0 , w_0 y p_0 representan las variables básicas.

Eliminando la densidad entre las ecuaciones (2.2) y (2.3), usando la ecuación hidrostática $(\partial p_0 / \partial z) = -\rho_0 g$ y definiendo el operador D/Dt como $\partial / \partial t + u_0 \partial / \partial x$ se tiene que

$$\frac{Dp'}{Dt} - \rho_0 g w' = -c_s^2 \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (2.4)$$

Si por otra parte eliminamos la densidad entre (2.3) y (2.1b) se puede obtener

$$\left(\frac{D^2}{Dt^2} + N^2 \right) w' + \frac{1}{\rho_0} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{g}{c_s^2} \right) p' = 0 \quad (2.5)$$

Si hacemos el cambio de variable

$$U \equiv (\rho_0 / \rho_s)^{1/2} u'$$

$$W \equiv (\rho_0 / \rho_s)^{1/2} w'$$

$$P \equiv (\rho_0 / \rho_s)^{1/2} p'$$

donde ρ_s es la densidad en algún nivel de referencia y ρ_0 la densidad básica; las ecuaciones (2.1a), (2.4) y (2.5) se pueden escribir de la forma.

$$\frac{DU}{Dt} + W \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\rho_s c_s^2} \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \Gamma \right) W = 0 \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{D^2}{Dt^2} + N^2 \right) W + \frac{1}{\rho_s} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Gamma \right) P = 0 \quad (2.8)$$

donde Γ es el coeficiente de Eckart, definido de la forma.

$$\Gamma = \frac{g}{2c_s^2} \left[1 - \frac{N^2 c_s^2}{g^2} \right]$$

con c_s la velocidad del sonido, g la gravedad y N la frecuencia de Brunt-Väisälä que en términos de la temperatura potencial está definida por la expresión (1.1).

Suponiendo soluciones de la forma $e^{ik(x-ct)}$ y definiendo la frecuencia intrínseca de la onda como $\omega = k[u_0(z) - c]$ se tiene que $D/Dt = -i\omega$ y podemos eliminar la dependencia en x y t en las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8) que pasan a escribirse en la forma

$$[u_0(z) - c] U - i W \frac{u'_0}{k} + \frac{1}{\rho_s} P = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{[u_0(z) - c]}{\rho_s c_s^2} P + U - i \frac{[\partial/\partial z - \Gamma]}{k} W = 0 \quad (2.10)$$

$$[N^2 - k^2(u_0(z) - c)^2] W + \frac{ik}{\rho_s} [u_0(z) - c] (\partial/\partial z + \Gamma) P = 0 \quad (2.11)$$

(donde u'_0 es la derivada parcial del flujo básico respecto a la coordenada z).

Eliminando P entre (2.9) y (2.10) y sustituyendo la expresión obtenida de esta manera para U en (2.9), se tiene una relación entre la perturbación de presión P y la perturbación de la velocidad vertical W .

$$\frac{kP}{\rho_s} = i \left[u'_0 + (u_0 - c) \frac{\Gamma + [(u_0 - c)/c_s^2] u'_0 - \partial/\partial z}{1 - [(u_0 - c)^2/c_s^2]} \right] W \quad (2.12)$$

que cuando se supone que el fluido se mueve de manera incomprensible, es decir, cuando puede considerarse que $c \ll c_s$, se reduce a

$$kP/\rho_s = i[u'_0 - (u_0 - (u_0 - c)(\partial/\partial z - \Gamma))]W \quad (2.13)$$

Por otra parte, si eliminamos P entre (2.11) y (2.13) (derivando previamente la ecuación (2.13) respecto a z) se tiene la ecuación

$$\frac{d^2 W(z)}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{(u_0 - c)^2} - k^2 - \frac{u_0''}{(u_0 - c)} - \frac{2\Gamma u_0'}{(u_0 - c)} - \Gamma^2 \right] W(z) = 0 \quad (2.14)$$

(donde u_0'' es la derivada segunda de u_0 respecto a la coordenada z).

Cuando Γ^2 es despreciable, la ecuación (2.14) es la ecuación de Taylor-Goldstein.

De hecho, el coeficiente de Eckart siempre tiene un valor muy pequeño en la atmósfera terrestre y es costumbre despreciar los términos en la ecuación (2.14) que incluyen Γ .

Existen diferentes versiones de esta ecuación que han sido utilizadas por diversos autores. Si se supone estratificación indiferente ($N=0$) y una variación lineal del viento con la altura ($u_0''=0$), la ecuación (2.14) se reduce a

$$\frac{d^2 W(z)}{dz^2} - k^2 W(z) = 0 \quad (2.15)$$

En este caso, se tienen soluciones de la forma

$$W = A \exp(kz) + B \exp(-kz) \quad (2.16)$$

Si por otra parte, se supone estabilidad estática ($N^2 > 0$) y un perfil de viento tal que $u_0'' = u_0' = 0$, se tiene que

$$\frac{d^2 W(z)}{dz^2} - k^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) W(z) = 0 \quad (2.17)$$

Esta ecuación tiene soluciones de la forma (2.16), pero ahora k es reemplazado por $\mu = k(1 - N^2/\omega^2)^{1/2}$. Cuando $N^2 > \omega^2$, μ es imaginario y la onda puede propagarse en la vertical, diciéndose que es una onda no atrapada, por otra parte, si $N^2 < \omega^2$, μ es real y entonces la amplitud de la onda decrece exponencialmente con z y se dice entonces que la onda es evanescente.

Cuando se supone una capa con estratificación estable y con cizalladura de viento (es decir, $N > 0$ y $u_0' \neq 0$), los coeficientes de la ecuación (2.17) son dependientes de z a través de la frecuencia intrínseca ω , y se tiene una ecuación diferencial hipergeométrica de soluciones más complicadas. Un resumen

de este tipo de soluciones puede encontrarse en Drazin y Howard (1966). Esta es la razón por la cual en los casos en que $N > 0$ se supone que $u_0' = 0$ para que ω sea independiente de z y las soluciones de la ecuación de Taylor-Goldstein sean de la forma (2.16).

Cuando se considera la atmósfera real como una superposición de diversas capas de propiedades distintas el problema se resuelve en cada una de las capas y posteriormente se aplican condiciones de contorno.

La condición de contorno cinemática exige continuidad de la velocidad perpendicular a la superficie de discontinuidad. En el caso en el que se tengan pequeñas perturbaciones la condición es equivalente a suponer continuidad en la velocidad vertical.

$$W_1 = W_2 \quad (2.18)$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren al valor que toma la velocidad vertical a cada uno de los lados del nivel de separación de las capas. Cuando se tenga una condición de contorno rígida, como la superficie de la Tierra, dicha condición es claramente $W=0$. A pesar de que la condición (2.18) sea comúnmente usada, cuando se tiene una discontinuidad de viento debe considerarse una versión más rigurosa de la condición de contorno, pues si η es el desplazamiento vertical

$$W = D\eta/Dt = \partial\eta/\partial t + u_0 \partial\eta/\partial x \quad (2.19)$$

y entonces deben tenerse en cuenta los diferentes valores de u_0 en cada uno de los lados del nivel de separación y (2.18) debe sustituirse por

$$W_1/\omega_1 = W_2/\omega_2 \quad (2.20)$$

donde ω es la frecuencia intrínseca definida anteriormente.

La condición de contorno dinámica supone que la presión es continua, es decir,

$$p_1 = p_2 \quad (2.21)$$

pero a menudo se usa la condición

$$dp_1/dt = dp_2/dt \quad (2.22)$$

que es del mismo grado de aproximación que la condición de contorno cinemática (2.18).

3. BREVE REVISION DE DIFERENTES MODELOS DE CAPAS SENCILLOS

Un gran número de modelos de capas han sido estudiados desde finales del siglo pasado. En esta sección vamos a comentar brevemente alguno de

ellos. Otros modelos más elaborados, como los de Gossard (1974), el modelo de Gedzelman y Rilling (1978), y el modelo de Monserrat y Ramis (1990) serán tratados con más detalle en las secciones siguientes.

Los primeros modelos de capas simulaban algunos aspectos de la atmósfera real sin considerar una condición de contorno inferior debida a la superficie rígida de la Tierra: las capas inferior y superior eran de anchura infinita. Se tendía con ello al estudio de modelos simétricos que simplificasen las ecuaciones de valores propios y permitiesen una resolución analítica de las mismas. De hecho, en estos modelos se trataban fluidos incomprensibles y se tomaba la densidad como variable. Se puede demostrar que las mismas ecuaciones se pueden aplicar a la atmósfera definiendo la frecuencia de Brunt-Väisälä y el coeficiente de Eckart en términos de la temperatura potencial y asumiendo que donde sea necesario es posible sustituir $\Delta\rho_s/\rho_s$ por $\Delta\theta/\theta_s$ (ver, por ejemplo, Gossard y Hooke, 1975).

En 1894 Lord Raileigh estudió una serie de modelos de tres capas con cizalladura de viento en la capa intermedia, pero con estratificación indiferente en todas ellas y sin discontinuidades de las variables (ver Rayleigh, 1945). En la figura 3.1 se observa uno de estos modelos en donde es posible obtener una solución muy sencilla. Se tiene que

$$\begin{array}{lll} u_0 = -\Delta U & \theta = \theta_0 & \text{para } z < -\Delta H \\ u_0 = \beta z & \theta = \theta_0 & \text{para } -\Delta H < z < \Delta H \\ u_0 = \Delta U & \theta = \theta_0 & \text{para } z > \Delta H \end{array}$$

Aquí, u_0 se refiere al flujo básico tal y como se introduce en la sección 2, pero las zonas de inestabilidad encontradas con el modelo no varían si se añade un valor constante en todas las capas a este flujo básico, por tanto, la cantidad u_0 puede considerarse como la diferencia entre el flujo básico real y un flujo constante.

Se trata de un modelo con capa inferior infinita y la ecuación de valores propios se reduce a

$$\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2 = \frac{\tanh(2\alpha)}{2(\tanh(2\alpha) + 1)} - \alpha(\alpha - 1) \quad (3.1)$$

donde $\sigma = kc$ es la frecuencia de la onda; $\beta = \Delta U/\Delta H$, representa la cizalladura de viento en la capa intermedia y $\alpha = k\Delta H$. Para este modelo es inmediato el determinar las zonas de inestabilidad.

Taylor (1931) considera un modelo de tres capas con variación lineal del viento (sin discontinuidades) y dos discontinuidades de temperatura potencial (o densidad) (fig. 3.2). Analíticamente:

$$u_0 = \beta z \left\{ \begin{array}{lll} \theta = \theta_0 - \Delta\theta & \text{para } z < -\Delta H \\ \theta = \theta_0 & \text{para } -\Delta H < z < \Delta H \\ \theta = \theta_0 + \Delta\theta & \text{para } z > \Delta H \end{array} \right.$$

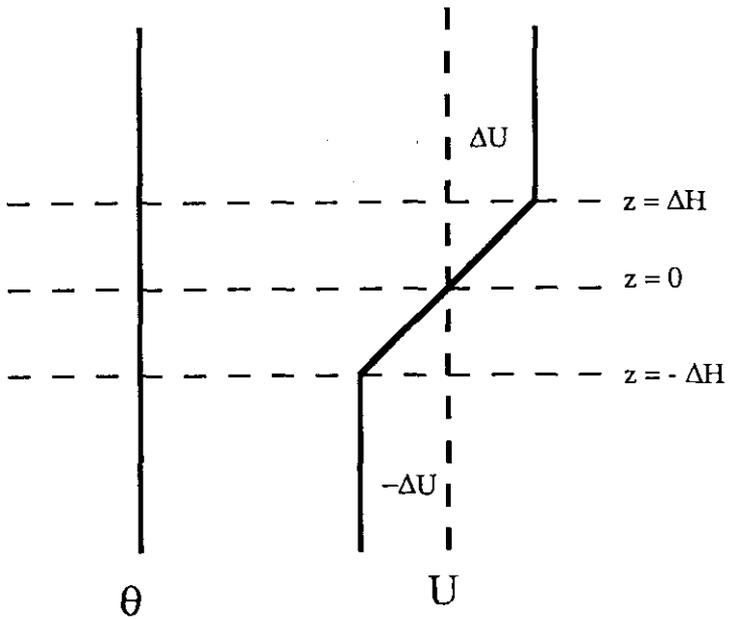


Figura 3.1.—Esquema de uno de los modelos estudiados por Rayleigh.

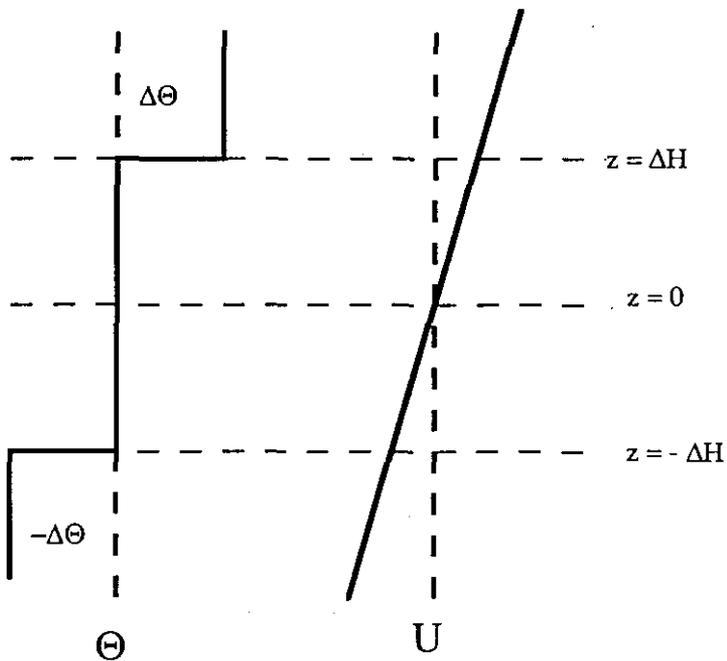


Figura 3.2.—Esquema del modelo de Taylor (1931).

Para evitar el problema, comentado en la sección anterior, de una ecuación diferencial con coeficientes variables, se asume que la temperatura potencial es constante ($N=0$) en cada una de las capas y la ecuación de Taylor-Goldstein se reduce a (2.15) en cada una de las capas. La ecuación de valores propios para este modelo puede expresarse como una ecuación cuadrática en $(C/\Delta U)^2$,

$$\left(\frac{c}{\Delta U}\right)^4 - 2\left(1 + \frac{1}{2} R/\alpha\right) \left(\frac{c}{\Delta U}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2} R/\alpha\right)^2 - \left(\frac{1}{2} R/\alpha\right)^2 e^{-4\alpha} = 0 \quad (3.2)$$

donde $\alpha = k \Delta H$ y $R = (g \Delta \theta \Delta H) / (2\theta \Delta U^2)$

El dominio de inestabilidad para este modelo se muestra en la figura 3.3.

Taylor (1931) y Goldstein (1931) de manera separada estudiaron un modelo que puede considerarse como el punto de partida de posteriores

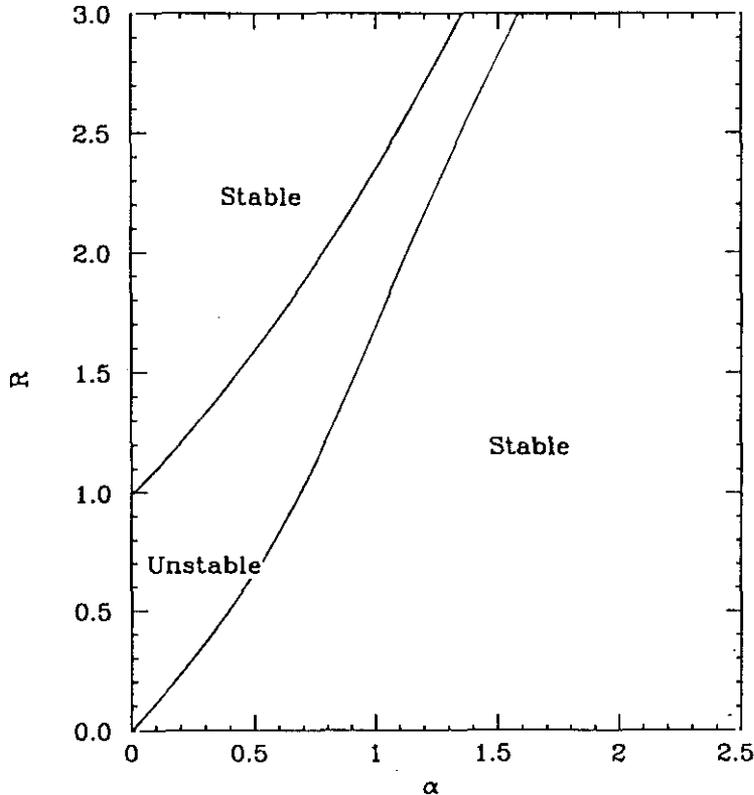


Figura 3.3.—Intervalo de inestabilidad en función de R para el modelo de Taylor (1931). (Tomada de Gossard y Hooke, 1975.)

trabajos sobre teoría de estabilidad de corrientes en la atmósfera (fig. 3.4). Este modelo puede considerarse una generalización del modelo de Raileigh con discontinuidad de temperatura en las interfases. Supone una capa intermedia con cizalladura de viento y capas superior e inferior con un valor constante del mismo. De manera analítica:

$$\begin{array}{lll}
 u_0 = -\Delta U & \theta = \theta_0 - \Delta\theta & \text{para } z < -\Delta H \\
 u_0 = \beta z & \theta = \theta_0 & \text{para } -\Delta H < z < \Delta H \\
 u_0 = \Delta U & \theta = \theta_0 + \Delta\theta & \text{para } z > \Delta H
 \end{array}$$

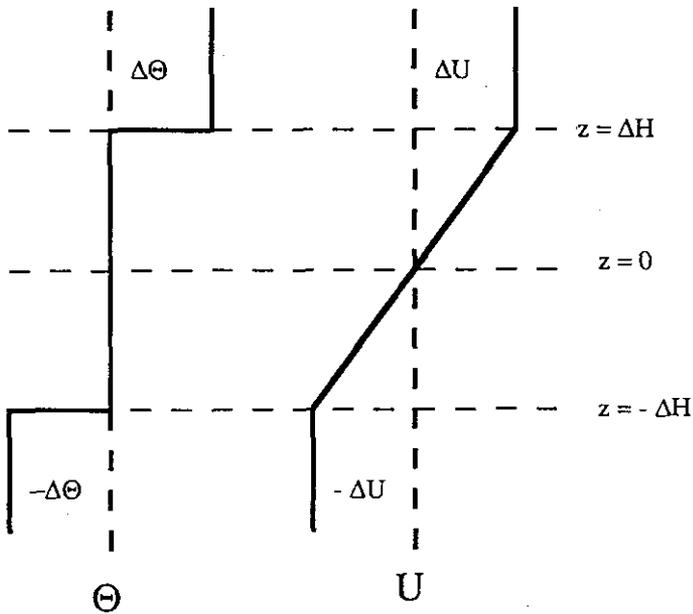


Figura 3.4.—Esquema del modelo estudiado por Taylor (1931) y Goldstein (1931).

El modelo permite discontinuidades de temperatura potencial, pero ésta se mantiene constante en cada una de las capas. El modelo supone que las capas inferior y superior son de anchura infinita.

La ecuación de valores propios puede de nuevo expresarse como una ecuación cuadrática de la forma:

$$\left(\frac{c}{\Delta U}\right)^4 - \left[1 + \frac{(2\alpha - 1)^2 - e^{-4\alpha}}{4\alpha^2} + \frac{R}{\alpha}\right] \left(\frac{c}{\Delta U}\right)^2 + \left(\frac{1+R}{2\alpha} - 1\right)^2 - \left(\frac{1+R}{2\alpha}\right)^2 e^{-4\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

La zona de inestabilidad deducida con este modelo se muestra en la figura 3.5.

Otro modelo que puede resultar de interés es el introducido por Holmboe (1962). Se trata, de hecho, de un modelo de cuatro capas tal y como puede verse en la figura 3.6, en donde:

$u_0 = -\Delta U$	$\theta = \theta_0$	para $z < -\Delta H$
$u_0 = \beta z$	$\theta = \theta_0$	para $-\Delta H < z < 0$
$u_0 = \beta z$	$\theta = \theta_0 + \Delta\theta$	para $0 < z < \Delta H$
$u_0 = \Delta U$	$\theta = \theta_0 + \Delta\theta$	para $z > \Delta H$

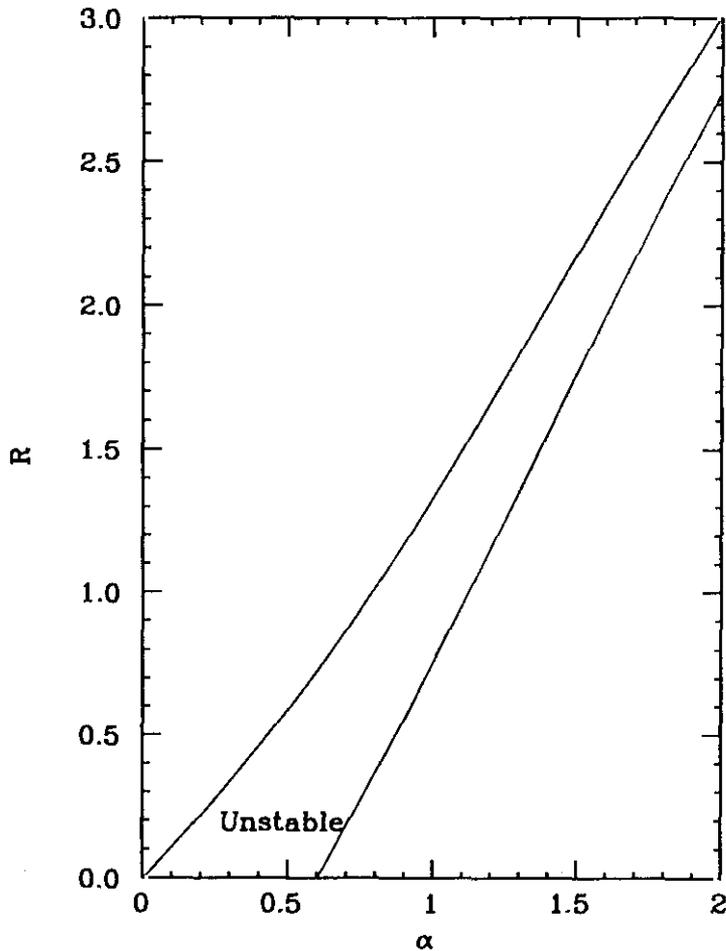


Figura 3.5.—Intervalo de inestabilidad en función de R para el modelo de Taylor (1931) y Goldstein (1931). (Tomada de Gossard y Hooke, 1975.)

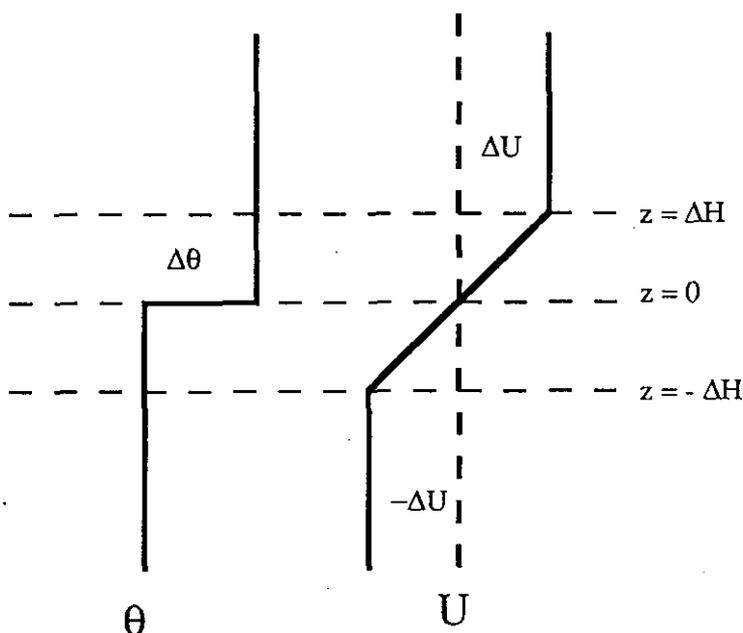


Figura 3.6.—Esquema del modelo de Holmboe (1962).

Se admiten discontinuidades de temperatura potencial, pero ésta se mantiene constante en cada capa. A pesar de que el modelo parezca complicado al incluir cuatro capas, también es posible obtener una ecuación de valores propios sencilla y resoluble analíticamente, debido a su marcada simetría.

$$4\alpha^2 \left(\frac{c}{\Delta U}\right)^4 - [(2\alpha - 1)^2 - e^{-4\alpha} + 4\alpha^2 (R/\alpha)] \left(\frac{c}{\Delta U}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} R/\alpha\right) [(2\alpha - 1) + e^{-2\alpha}]^2 = 0 \quad (3.4)$$

La zona de inestabilidad para este modelo se muestra en la figura 3.7.

Gossard y Munk (1954) introducen un modelo de tres capas en el que una cierta estabilidad ($N > 0$) es permitida en cada una de las capas, sin embargo, el perfil de viento se considera constante para evitar el problema de la ecuación diferencial con coeficientes variables. No se tienen discontinuidades de temperatura potencial, pero en este caso se considera una condición de contorno inferior rígida (fig. 3.8). Analíticamente:

$$\begin{aligned} u_0 = U_0 \quad \theta_1 = \theta_0 \exp((N_1^2/g)z) & \quad \text{para } z < H \\ u_0 = U_0 \quad \theta_2 = \theta_1(H) \exp((N_2^2/g)(z-H)) & \quad \text{para } H < z < H + 2\Delta H \\ u_0 = U_0 \quad \theta_3 = \theta_1(H + 2\Delta H) \exp((N_3^2/g)(z-H-2\Delta H)) & \quad \text{para } z > H + 2\Delta H \end{aligned}$$

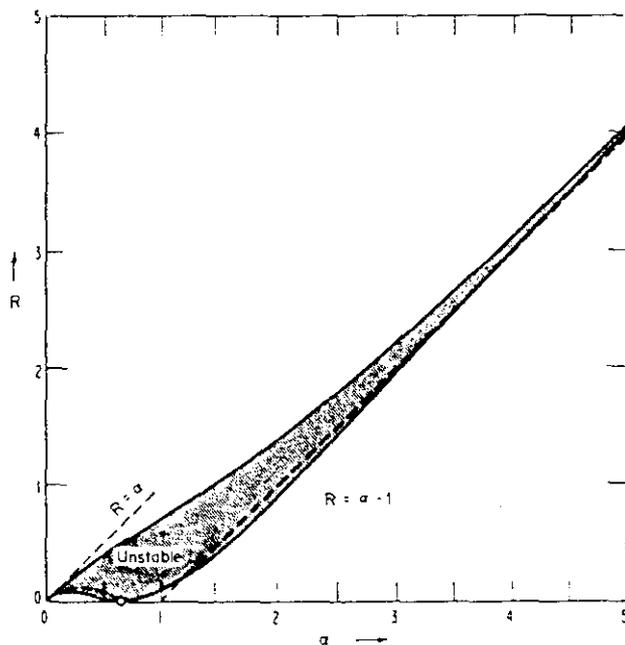


Figura 3.7.—Intervalo de inestabilidad en función de R para el modelo de Holmboe (1962). (Tomada de Gossard y Hooke, 1975.)

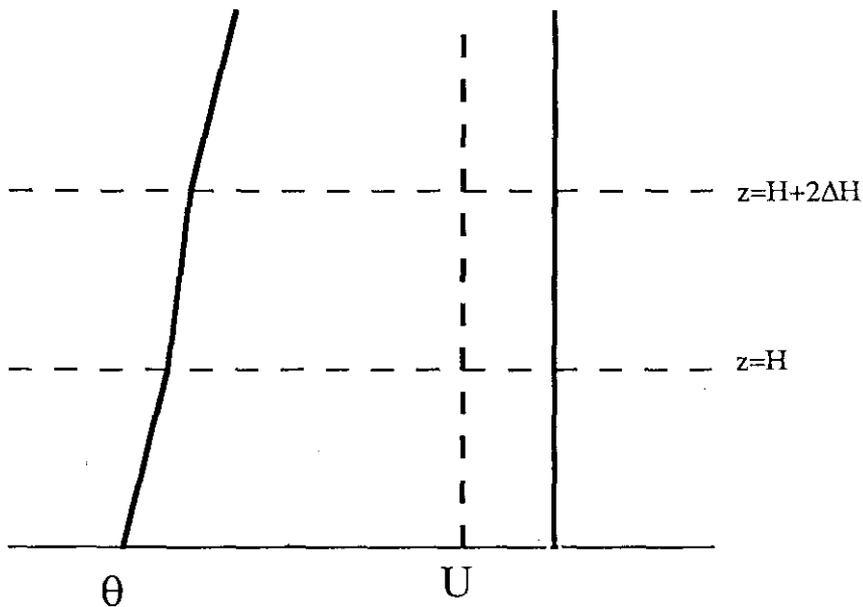


Figura 3.8.—Esquema del modelo de Gossard y Munk (1954).

En este caso, debido a la introducción de una nueva condición de contorno inferior, la ecuación de valores propios aumenta en complejidad y es más difícil obtener soluciones analíticas. En la sección siguiente se comentan los modelos de Gossard (1974) y la ecuación de valores propios del modelo de Gossard y Munk (1954) puede deducirse entonces como un caso particular de los mismos.

En estos modelos (y en otros no citados aquí) se ha sacrificado el hecho de simular con mayor exactitud los perfiles verticales de temperatura y viento en aras de obtener modelos cuya ecuación de valores propios sea analíticamente resoluble. Para ello, la característica principal de estos modelos es su marcada simetría. En las secciones siguientes, veremos otros modelos, en donde algunos de los aspectos de la atmósfera real están mejor reflejados, pero debido a ello se obtienen ecuaciones de valores propios que para ser resueltas necesitan de alguna simplificación o del uso de métodos numéricos.

4. MODELO DE GOSSARD

Un modelo de tres capas que incluye como casos particulares los enumerados en la sección 3 fue presentado por Gossard (1974) (ver también Gossard y Hooke, 1975). Dicho modelo considera una capa de cizalladura entre otras dos donde el flujo es constante. Las capas superior e inferior son estáticamente estables ($N > 0$), mientras la capa de cizalladura presenta estratificación indiferente ($N = 0$). Se permite una discontinuidad de temperatura en cada uno de los niveles de separación.

Dicho modelo está esquematizado en la figura 4.1 y analíticamente está definido por

$$\begin{aligned} u_0 &= -\Delta U & \theta &= \theta_0 \exp((N_1^2/g)z) & \text{para } z < H \\ u_0 &= -\Delta U + \beta(z-H) & \theta &= \theta_H & \text{para } H < z < H + 2\Delta H \\ u_0 &= \Delta U & \theta &= \theta_{H+2\Delta H} \exp(N_3^2/g(z-H-2\Delta H)) & \text{para } z > H + 2\Delta H \end{aligned}$$

donde, como en la sección anterior $\beta = \Delta U / \Delta H$ representa la cizalladura en la capa intermedia.

La ecuación de Taylor-Goldstein (2.14) se reduce a la (2.15) para la capa de cizalladura y a la (2.17) para las capas superior e inferior con soluciones de tipo exponencial en cada una de las capas.

Recordando que $\alpha = k \Delta H$, y teniendo presente la distribución vertical del viento obtenemos

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{\sigma}{\beta} \pm \alpha \quad (4.1)$$

con + para la capa inferior y - para la superior, donde $\sigma = kc$ y ω es la frecuencia intrínseca de la onda.

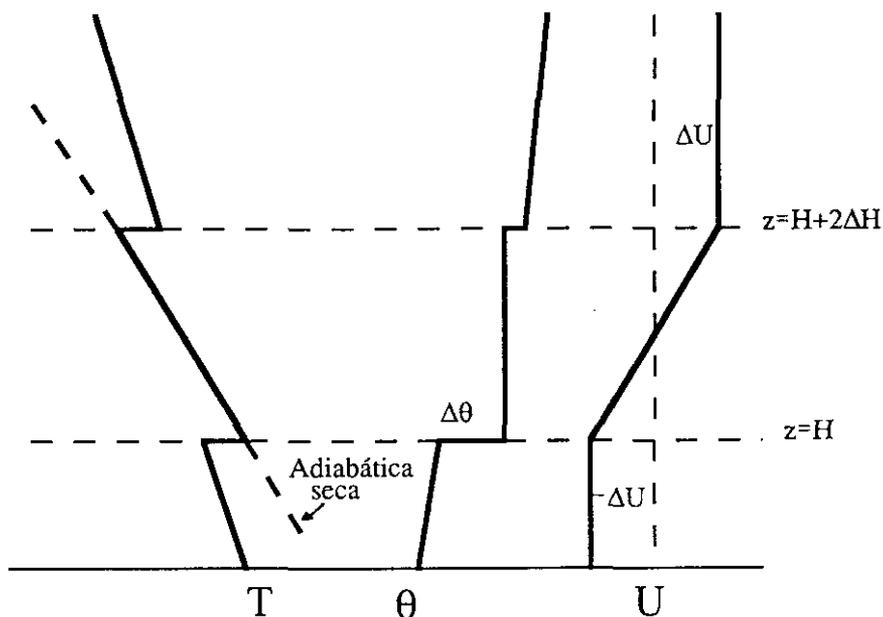


Figura 4.1.—Esquema del modelo de Gossard (1974).

Para la capa intermedia

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{\sigma}{\beta} + \alpha \left[1 - \frac{z-H}{\Delta H} \right] \quad (4.2)$$

por lo tanto

$$\mu_{1,3} = k \left[1 - \left(\frac{N_{1,3}/\beta}{\frac{\sigma}{\beta} \pm \alpha} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

Podemos eliminar las constantes arbitrarias de las soluciones imponiendo condiciones cinemáticas y dinámicas de contorno.

La condición dinámica de contorno, en este caso, debido a la discontinuidad de temperatura, y expresando la presión en términos de la velocidad vertical (2.13), se transforma en la continuidad de

$$\rho_s \left(\frac{\omega}{k} \right) \left(\beta W + \frac{\omega}{\kappa} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \rho_s g W \quad (4.4)$$

Llamando $\alpha_1 = \mu_1 \Delta H \coth \mu_1 H$ y $\alpha_3 = \mu_3 \Delta H$ obtenemos la ecuación de valores propios para la velocidad de fase c en función del número de ondas (o su equivalente α):

$$e^{4\alpha} \left[\frac{-R_U + \left(\frac{c}{\Delta U} - 1\right)^2 (\alpha_3 + \alpha) + \frac{c}{\Delta U} - 1}{R_U + \left(\frac{c}{\Delta U} - 1\right)^2 (\alpha + \alpha_3) - \frac{c}{\Delta U} + 1} \right] =$$

$$= \left[\frac{R_L + \left(\frac{c}{\Delta U} + 1\right)^2 (\alpha - \alpha_1) + \frac{c}{\Delta U} + 1}{-R_L + \left(\frac{c}{\Delta U} + 1\right)^2 (\alpha + \alpha_1) - \frac{c}{\Delta U} - 1} \right] \quad (4.5)$$

donde

$$R_{U,L} = \frac{g(\Delta\theta)_{U,L} \Delta H}{\theta_{U,L} (\Delta U)^2} \quad (4.6)$$

son números de Richardson globales que podemos asociar a las mitades superior e inferior de la capa de cizalladura del viento, respectivamente.

Aunque el modelo, tal como está construido, admite valores diferentes de $\Delta\theta$ en las dos superficies de discontinuidad, Gossard estudia el caso particular para el cual $R_U = R_L = R$. Como $c/\Delta U = \sigma/\alpha\beta$, la ecuación (4.5) toma la forma

$$a \left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^4 + b \left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^3 + d \left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2 + e \left(\frac{\sigma}{\beta}\right) + f = 0 \quad (4.7)$$

donde

$$a = \frac{1 + \alpha_1 \alpha_3 / \alpha^2}{\alpha^2} \tanh 2\alpha + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha^3}$$

$$b = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha^3} \tanh 2\alpha$$

$$d = - \left[\frac{(R-1)(\alpha_1 + \alpha_3)}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + 2 \left(1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha^2} \right) \right] \tanh 2\alpha -$$

$$- \frac{2}{\alpha} [R - 1 + (\alpha_1 + \alpha_3)]$$

Para ondas estacionarias respecto del flujo medio ($c=0$), la figura 4.2 nos muestra las longitudes de onda inestables en función de R . El intervalo de inestabilidad disminuye rápidamente al aumentar R , de tal manera que para $R>3$ la excitación es prácticamente monocromática. De la misma figura también se deduce la relación entre la longitud de onda y el espesor de la capa de cizalladura, para $R=1$ dicha relación está entre 2.4 y 2.7. Los intervalos de inestabilidad para ondas no estacionarias respecto al flujo medio pueden deducirse de la figura 10 de Gossard (1974).

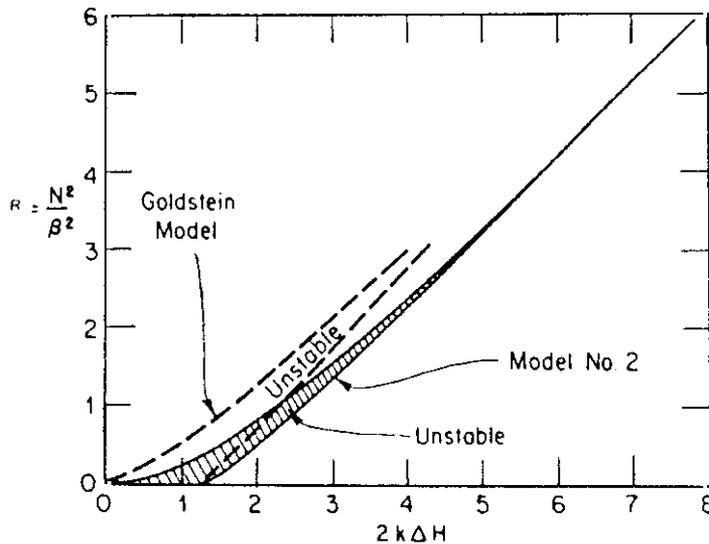


Figura 4.2.—Intervalos de inestabilidad en función de R , para las ondas estacionarias respecto del flujo medio. Modelo de Gossard (1974).

Este modelo es una generalización de modelos anteriores a los cuales se reduce mediante la asignación de valores apropiados a R y N . El mismo Gossard presenta otro modelo con igual distribución de viento, pero sin considerar discontinuidades de temperatura. Dicho modelo se obtiene del anterior haciendo $R=0$. La ecuación de valores propios para la velocidad de fase puede reducirse a una ecuación de segundo grado en σ/β , pues admite dos soluciones reales $c = \pm \Delta u$. Si además consideramos $N=0$ se reduce al modelo de Rayleigh cuya ecuación de valores propios es la ecuación (3.1).

Si hacemos $\beta=0$ el modelo se reduce al de Gossard y Munk (1954) si en éste consideramos $N_2=0$.

La figura 4.3 muestra las zonas de inestabilidad y las velocidades de fase para el modelo simplificado de Gossard ($R=0$) parametrizadas en función de $H/\Delta H$ para $(N/\beta)=0$. Los mínimos de las curvas continuas indican la longitud de onda más inestable y su ordenada (en valor absoluto) el cuadrado de la velocidad de crecimiento. Se observa que la longitud de onda más inestable

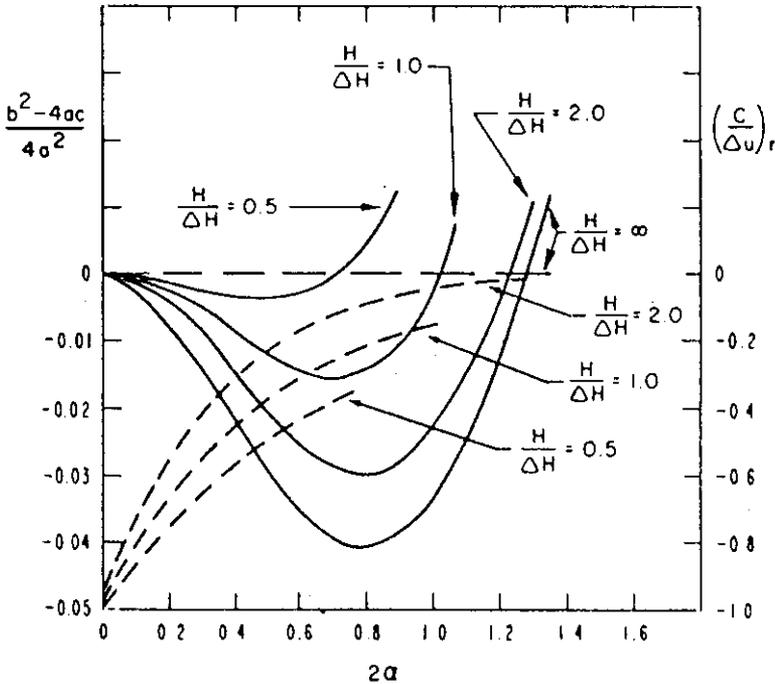


Figura 4.3.—Zonas de inestabilidad, velocidades de crecimiento y velocidades de fase para el modelo de Gossard (1974), con $R=0$ y parametrizadas en función de $H/\Delta H$ para $N/\beta=0$.

es menor cuanto mayor es la relación $H/\Delta H$. Análogamente las ondas inestables tienden a moverse con una velocidad de fase que coincide con la velocidad del viento en algún nivel de la mitad inferior, tendiendo a ser estacionarias respecto al flujo medio solamente cuando $H/\Delta H \rightarrow \infty$.

5. MODELO DE GEDZELMAN Y RILLING

El modelo más sencillo que permite reproducir la estructura vertical de la atmósfera presente durante los episodios de ondas gravitatorias observadas en Palisades (N.Y.) y cuyo origen fue atribuido a inestabilidades por cizalladura en la corriente en chorro está representado en la figura 5.1. Consiste básicamente en introducir una discontinuidad del viento en el nivel superior y una discontinuidad de temperatura (inversión) en el nivel inferior. Se supone además que la estratificación es indiferente ($N=0$) en las tres capas. Analíticamente

$u_0 = 0$	$\theta = \theta_0$	para $z < H$
$u_0 = 0$	$\theta = \theta_0 + \Delta\theta$	para $H < z < H + 2\Delta H$
$u_0 = \Delta U$	$\theta = \theta_0 + \Delta\theta$	para $z > H + 2\Delta H$

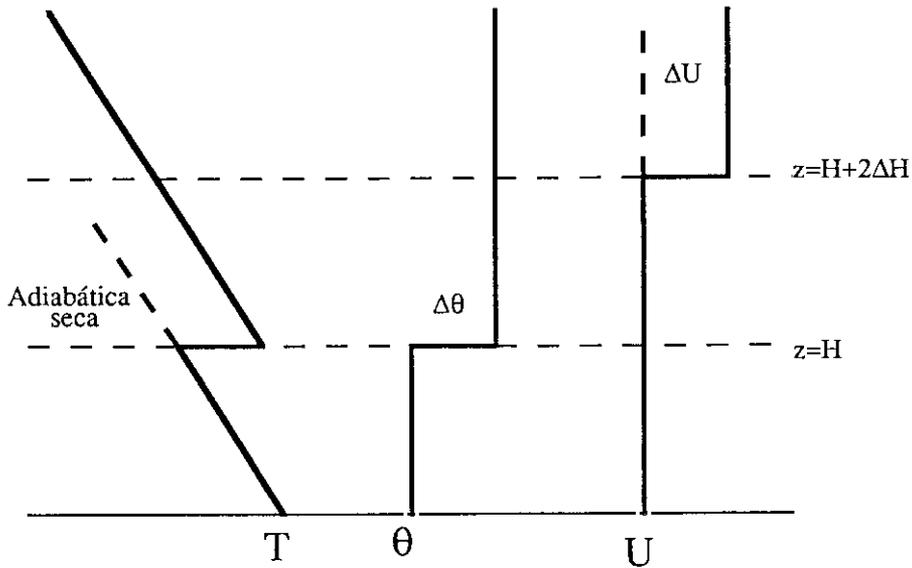


Figura 5.1.—Esquema del modelo de Gedzelman y Rilling (1978).

Aunque el modelo presenta la característica que todas las ondas son inestables, permite obtener una expresión para la perturbación de la presión en superficie que incluye las dos discontinuidades consideradas y explica muchas de las características de los registros de presión obtenidos.

La ecuación de Taylor-Goldstein (2.14) se reduce a la (2.15) para las tres capas con soluciones de la forma (2.16). Aplicando las condiciones cinemáticas de contorno (continuidad de $W/(U-c)$ en los niveles de discontinuidad), y la condición dinámica, podemos eliminar las constantes y obtener la ecuación de valores propios para la velocidad de fase. Definiendo α y α_1 como en la sección anterior, obtenemos

$$ac^4 + bc^3 + dc^2 + ec + f = 0 \quad (5.1)$$

donde

$$a = 2e^{2\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_1} \right)$$

$$b = 2\Delta U \left[-e^{2\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_1} \right) + e^{-2\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} - 1 \right) \right]$$

$$d = (\Delta U)^2 \left\{ e^{2\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_1} \right) - e^{2\alpha} \frac{2R}{\alpha} - e^{-2\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} - 1 \right) \right\}$$

$$e = 4(\Delta U)^3 \frac{R}{\alpha} \sinh 2\alpha$$

$$f = -\frac{2(\Delta U)^4 R}{\alpha} \sinh 2\alpha$$

y en este caso

$$R = \frac{g \Delta\theta \Delta H}{\theta_s (\Delta U)^2} \quad (5.2)$$

es un número de Richardson global.

En un intento de resolver analíticamente la ecuación de cuarto grado suponen soluciones para la velocidad de fase de la forma

$$c^4 \approx c^2 c_0^2, \quad c^3 \approx c c_0^2, \quad c^2 \approx c_0^2, \quad c \approx c_0 \quad (5.3)$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{2} \Delta U \left[\left(1 - e^{-2\alpha(2 + \frac{H}{\Delta H})} \right) + \left(e^{-4\alpha(2 + \frac{H}{\Delta H})} - 1 \right)^{1/2} \right] \quad (5.4)$$

que corresponde a una onda inestable, pues solamente c_0 es real cuando $\lambda \rightarrow \infty$, y además es más inestable cuanto menor es la longitud de onda.

La solución es de la forma

$$c \approx \frac{1}{2} \Delta U \left[\left(1 - e^{-2\alpha(2 + \frac{H}{\Delta H})} \right) + \left(e^{-4\alpha(2 + \frac{H}{\Delta H})} - 1 + G'' \right)^{1/2} \right] \quad (5.5)$$

donde

$$G'' = \left[\frac{8R}{\alpha} \frac{\sinh^2 \alpha \frac{H}{\Delta H}}{\left(e^{2\alpha(1 + \frac{H}{\Delta H})} - 1 \right)} \right] \quad (5.6)$$

y la solución es válida siempre que $G'' \ll 1$, condición que deja de cumplirse cuando la inversión es al mismo tiempo grande y muy cercana al nivel de cizalladura.

Para estudiar los factores que afectan la magnitud de las perturbaciones de presión registradas en superficie se puede hacer uso de la ecuación (2.13)

que relaciona la perturbación de la presión con la velocidad vertical. Siempre que $G'' \ll 1$, en una aproximación de primer orden resulta

$$\frac{|P(0)|}{|P(H+2\Delta H)|} \sim 2e^{-\alpha(2+H/\Delta H)} \left[1 + \left(\frac{R}{\alpha} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.7)$$

El factor exponencial ha sido llamado un filtro atmosférico natural, ya que las ondas cortas que son generadas en la troposfera media y alta sufren un amortiguamiento fuerte y la perturbación de presión en el suelo es despreciable. Por esta razón las longitudes de onda menores de 5 km no son detectadas, así como las ondas gravitatorias que producen la TAC no dan perturbación de presión en superficie.

El hecho de que las ondas registradas tiendan a ser de mayor amplitud cuanto mayor es la estabilidad en la capa inferior (cuanto más marcada es la inversión) también está reflejado en la expresión (5.7) a través de R . Podría decirse que la inversión actúa como una «caja de resonancia» amplificando las perturbaciones de presión en superficie.

6. MODELO DE MONSERRAT Y RAMIS

El modelo propuesto por Monserrat y Ramis (1990) permite discontinuidades de temperatura (o densidad) y también discontinuidades de viento, con lo que se puede considerar un punto de unión entre los modelos previamente comentados de Gossard (1974) por una parte y de Gedzelman y Rilling (1978) por otra.

El modelo se muestra esquemáticamente en la figura 6.1, donde

$$\begin{array}{lll} u_0 = -\varepsilon \Delta U & \theta = \theta_0 \exp((N_1^2/g)z) & \text{para } z < H \\ u_0 = -\varepsilon \Delta U + \beta'(z-H)\theta = \theta_H & & \text{para } H < z < H + 2\Delta H \\ u_0 = \Delta U & \theta = \theta_{H+2\Delta H} \exp(N_3^2/g(z-H-2\Delta H)) & \text{para } z > H + 2\Delta H \end{array}$$

y

$$\beta' = \varepsilon (\Delta U / \Delta H) = \varepsilon \beta \quad (6.1)$$

Como puede verse el modelo incluye dos discontinuidades de temperatura y en ningún momento se supone que éstas deban ser iguales, al contrario de lo asumido en el modelo de Gossard al obtener la ecuación de valores propios. Esto permite tener en cuenta que las inversiones de temperatura observadas a niveles bajos (las cuales pueden ser simuladas por discontinuidades de temperatura) son normalmente más pronunciadas que las observadas a niveles altos. Por otra parte se permite una discontinuidad en el perfil del viento por medio del parámetro ε .

Cuando en este modelo se supone que $\varepsilon = 1$ (es decir, sin discontinuidades en el perfil de viento) y ambas discontinuidades de temperatura se asumen

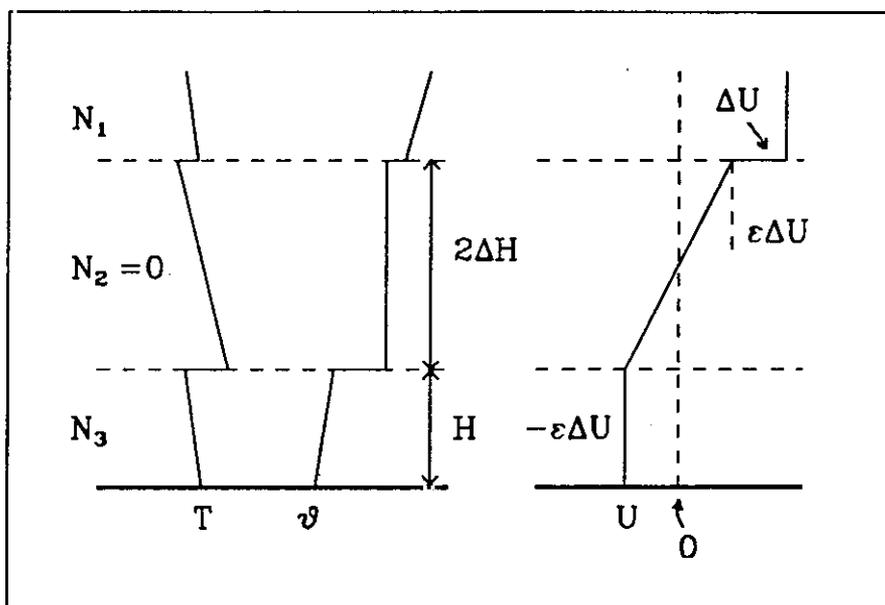


Figura 6.1.—Esquema del modelo de Monserrat y Ramis (1990).

iguales, se recupera el modelo de Gossard (1974). Por otra parte cuando $\varepsilon = 0$ se recupera el perfil de viento usado por Gedzelman y Rilling (1978). Además cuando $\varepsilon = 0$ y $\Delta U = 0$ se tiene el perfil de viento (sin cizalladura) de Gossard y Munk (1954).

Para encontrar los intervalos de inestabilidad se supone, como en los casos anteriores, que se cumple la ecuación de Taylor-Goldstein aplicada a la atmósfera en cada una de las capas y entonces se aplican condiciones de contorno en los niveles de separación.

Para las capas inferior y superior la ecuación de Taylor-Goldstein (2.14) se reduce a (2.17) y en la capa intermedia, debido a que $N = 0$, la ecuación que debe considerarse es (2.15).

Las soluciones en cada capa son entonces de la forma

$$\begin{aligned} W_1 &= A_1 \exp(\mu_1 z) + B_1 \exp(-\mu_1 z) \\ W_2 &= A_2 \exp(kz) + B_2 \exp(-kz) \\ W_3 &= A_3 \exp(\mu_3 z) + B_3 \exp(-\mu_3 z) \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde

$$\mu_{1,3} = k \left[1 - \frac{N_{1,3}^2}{\omega_{1,3}^2} \right]^{1/2} \quad (6.3)$$

Aplicando condiciones de contorno de la forma indicada en las secciones anteriores y recordando las definiciones de α , α_1 y α_3 de la sección 4, podemos escribir una ecuación de valores propios de la forma (4.7) donde ahora las cantidades a, b, d, e y f vienen dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{\alpha^2} \left[1 + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha^2} \right] \tanh(2\alpha) + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha^3} \\
 b &= \left[\varepsilon \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)}{\alpha^3} - \frac{2\alpha_1 \alpha_3 (1 - \varepsilon)}{\alpha^3} \right] \tanh(2\alpha) \frac{2\alpha_3 (1 - \varepsilon)}{\alpha^2} \\
 &\quad - \frac{R_U + R_L}{\alpha} + \frac{(\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1)\alpha_3 - 2\varepsilon^2 \alpha_1 + 2\varepsilon^2}{\alpha} \\
 d &= \left[\frac{(\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1)\alpha_1 \alpha_3}{\alpha^2} - \varepsilon^2 \left(2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{\varepsilon^2(\alpha_1 - \alpha_3) + 2\varepsilon\alpha_3}{\alpha^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(R_U \alpha_1 + R_L \alpha_3)}{\alpha^2} \right] \tanh(2\alpha) \\
 &\quad - \frac{R_U + R_L}{\alpha} + \frac{(\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1)\alpha_3 - 2\varepsilon^2 \alpha_1 + 2\varepsilon^2}{\alpha} \\
 e &= \left[\frac{(2\varepsilon^2 - \varepsilon)\alpha_3 - \varepsilon^3 \alpha_1 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon)\alpha_1 \alpha_3 + \varepsilon(R_U - R_L) + 2R_L \alpha_3 - 2\varepsilon\alpha_1 R_U}{\alpha} \right] \tanh(2\alpha) \\
 &\quad + 2\varepsilon(R_L - R_U) + 2\varepsilon\alpha_3(1 - \varepsilon) \\
 f &= [\varepsilon^4(\alpha^2 - \alpha_1 + 1) + \varepsilon^2(\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_3 + R_U + R_L - \alpha_1 R_U) + R_U R_L - \alpha_3 R_L] \tanh(2\alpha) \\
 &\quad - 2\varepsilon^4 \alpha + \alpha \varepsilon^2 (\alpha_3 + \varepsilon^2 \alpha_1 - R_U - R_L)
 \end{aligned}$$

con

$$R_L = \frac{g \Delta \theta_L \Delta H}{-\theta_s \Delta U^2} \quad R_U = \frac{g \Delta \theta_U \Delta H}{-\theta_s \Delta U^2} \quad (6.4)$$

Es fácil comprobar que cuando $\varepsilon=1$ y $R_U=R_L=R$ se recupera la ecuación de valores propios de Gossard. En el otro extremo, cuando $\varepsilon=0$ y hacemos $R_U=N_1=N_3=0$ se recupera la ecuación de valores propios de Gedzelman y Rilling. Cuando $\varepsilon=0$ y $R_L=0$ se tiene un modelo de dos capas que es equivalente al problema de inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Esta ecuación de valores propios tiene la forma de una ecuación de cuarto grado, pero sólo puede considerarse como tal cuando $N=0$ en todas las

capas, pues así μ es independiente de la variable c y por tanto los coeficientes de la ecuación son también independientes de la variable c . En caso contrario la ecuación de valores propios se convierte en una ecuación de variable compleja con coeficientes complejos y para obtener alguna información sobre las zonas de inestabilidad es preciso resolverla numéricamente.

Estudiando la influencia de los diferentes parámetros del modelo en la zona de inestabilidad, se demuestra que cuando el valor de R_U aumenta, el dominio de inestabilidad se corre más rápidamente hacia longitudes de onda más cortas (y pasa a ser más estrecho) que cuando aumentamos el valor de R_L . También se muestra que cuando se permite una discontinuidad de viento las soluciones son inestables desde un valor dado de α (α_0) hasta $\alpha = \infty$. Además la onda es cada vez más inestable hasta que alcanza un máximo para $\lambda = 0$. El valor de α_0 depende de los valores de la discontinuidad de temperaturas y viento en el nivel de separación superior, pero es débilmente dependiente del valor de la discontinuidad de temperaturas en el nivel inferior (fig. 6.2).

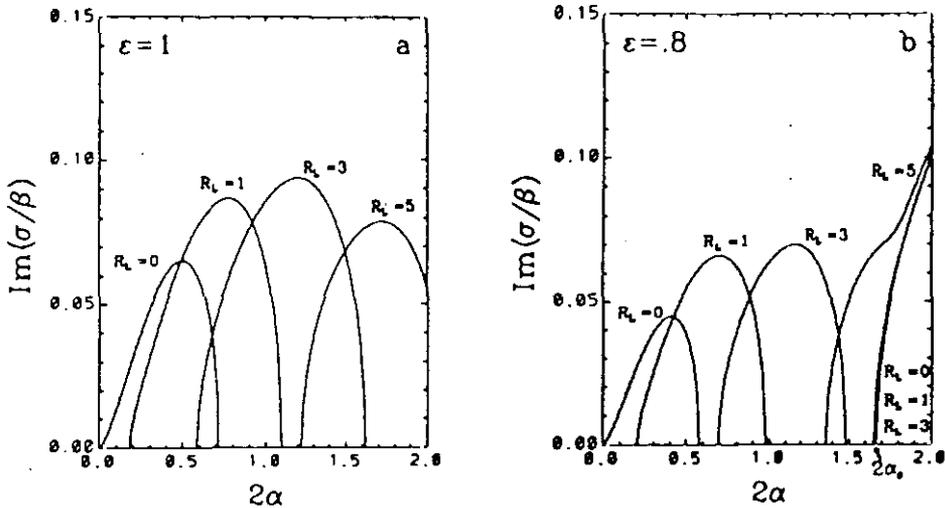


Figura 6.2.—Parte imaginaria de (σ/β) en función de 2α para diferentes valores de R_L y para $H/\Delta H = 0.5$, $N = 0$ y $R_U = 0$. a) $\varepsilon = 1$, b) $\varepsilon = 0.8$. (Monserrat y Ramis, 1990.)

A medida que la discontinuidad en el perfil del viento es mayor, el valor de α_0 es cada vez menor y el dominio de inestabilidad para longitudes de onda mayores se modifica, decreciendo el valor de la tasa de crecimiento y reduciendo el intervalo de ondas inestables. Cuando se tiene discontinuidad en el perfil del viento y además N es distinto de cero todas las longitudes de onda son inestables.

Se señala también, que el despreciar la frecuencia de Brunt-Vaisala para simplificar el proceso matemático provoca una sobreestimación de la longitud de onda más inestable (fig. 6.3).

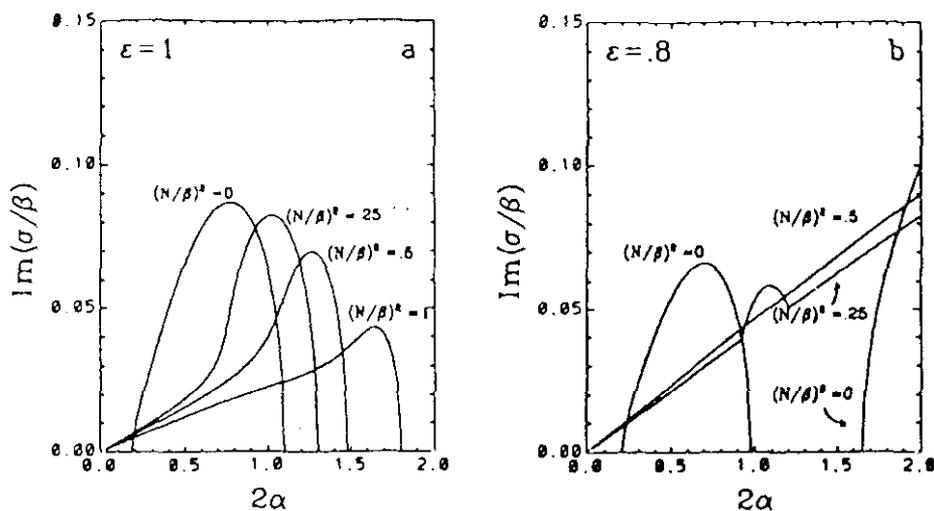


Figura 6.3.—Parte imaginaria de (σ/β) en función de 2α para diferentes valores de $(N/\beta)^2$ y para $H/\Delta H = 0.5$, $R_U = 0$ y $R_I = 1$, a) $\varepsilon = 1$, b) $\varepsilon = 0.8$. (Monserrat y Ramis, 1990.)

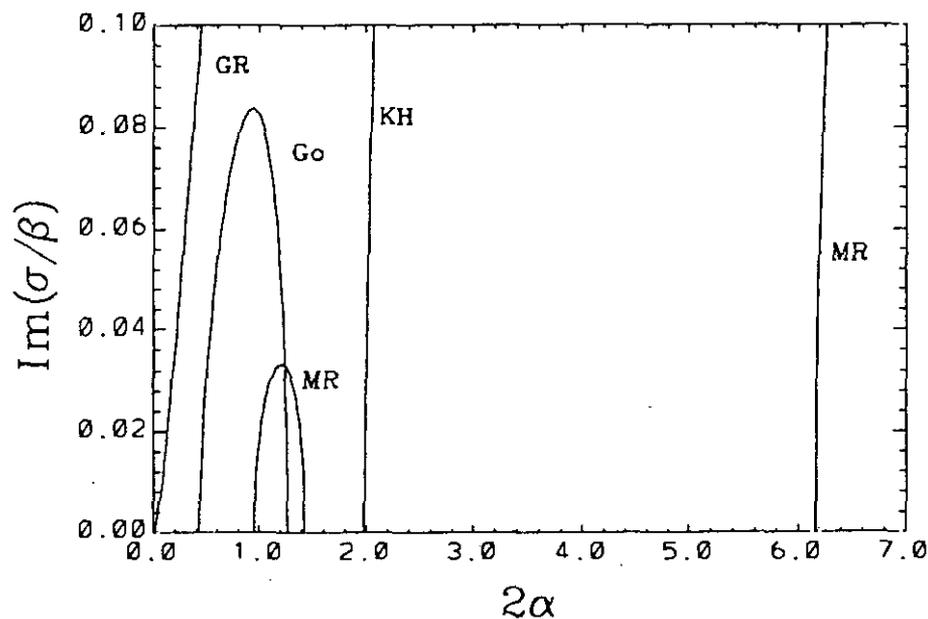


Figura 6.4.—Parte imaginaria de (σ/β) en función de 2α para $H/\Delta H = 0.5$, $N = 0$ y diferentes valores de R_U , R_I y ε correspondientes a varios modelos: Gedzelman and Rilling (1978) (GR) ($R_U = 0$, $R_I \approx 0.5$, $\varepsilon = 0$); inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KH) ($R_U = 0.5$, $R_I = 0$, $\varepsilon = 0$); Gossard (1974) (Go) ($R_U = 0.5$, $R_I = 0.5$, $\varepsilon = 1$); Monserrat y Ramis (1990) (MR) ($R_U = 0.5$, $R_I = 0.5$, $\varepsilon = 0.5$).

Una forma de poner en evidencia la influencia de los diferentes parámetros en el dominio de inestabilidad es comparando los resultados que se obtienen con diferentes modelos para el caso en que $N=0$. Monserrat y Ramis (1990) presentan una figura que clarifica algunos de los resultados mencionados. Comparando los resultados para la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz y para el modelo de Gedzelman y Rilling (1978) (y recordando que la influencia de R_L sobre α_0 es muy pequeña) se observa que la presencia de una discontinuidad de temperatura en la interfase superior ($R_U \neq 0$) desplaza las longitudes de onda inestables hacia escalas más cortas (fig. 6.4). Por otra parte también puede comprobarse en la figura 6.4 que el modelo de Monserrat y Ramis (1990) se comporta de manera similar a los modelos de Gossard para longitudes de onda largas, aunque el dominio de inestabilidad se ve reducido y la tasa de crecimiento decrece cuando la discontinuidad de viento aumenta; pero existe un valor de α a partir del cual todas las longitudes de onda son inestables. Cuando $\varepsilon \rightarrow 1$ entonces $\alpha_0 \rightarrow \infty$ y se recuperan los resultados de Gossard.

REFERENCIAS

- Atkinson, B. W. (1981): *Meso-scale Atmospheric Circulations*. Academic Press. 495 pp. New York.
- Balachandran, N. K. and W. L. Donn (1964): Short and long period gravity waves over the northeast United States. *Mon. Wea. Rev.* **92**, 423-426.
- Balachandran, N. K. (1980): Gravity waves from thunderstorms. *Mon. Wea. Rev.* **108**, 804-816.
- Bosart, L. F. and J. P. Cussen, Jr. (1973): Gravity wave phenomena accompanying east coast cyclogenesis. *Mon. Wea. Rev.* **101**, 446-454.
- Chimonas, G. and J. R. Grant (1984): Shear excitation of gravity waves. Part I: Modes of a two-scale atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **41**, 2269-2277.
- Deardoff, J. W. (1969): Numerical study of heat transport by internal gravity waves above a growing unstable layer. *Phys. Fluids. Suplement II*. 11184-11194.
- DeMaria, M., J. M. Davis and D. M. Wojtak (1989): Observations of mesoscale wave disturbances during the genesis of Atlantic Lows Experiment. *Mon. Wea. Rev.* **117**, 826-842.
- Donn, W. L., R. Rommer, F. Press and M. Ewing (1954): Atmospheric oscillations and related synoptic patterns. *Bull. Am. Meteor. Soc.* **35**, 301-309.
- Drazin, D. G. and L. N. Howard (1966): Microdynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. *Adv. Appl. Mech.* Vol 9, Academic Press. 1-89.
- Fritts, D. C. (1980): Simple stability limits for vertically propagating unstable modes in $\tanh(z)$ velocity profile with a rigid lower boundary. *J. Atmos. Sci.* **37**, 1642-1648.
- Gall, R. L., R. T. Williams and T. L. Clark (1988): Gravity waves generated during frontogenesis. *J. Atmos. Sci.* **45**, 2204-2219.
- Gedzelman, S. D. and R. A. Rilling (1978): Short period atmospheric gravity waves: a study of their dynamic and synoptic features. *Mon. Wea. Rev.* **106**, 196-210.
- Goldstein, S. (1931): On the stability of superposed streams of fluid of different densities. *Proc. Roy. Soc. London*, **A132**, 524-548.
- Gossard, E. E. and W. H. Munk (1954): On waves in the atmosphere. *J. Meteor.* **11**, 259-269.

- Gossard, E. E. (1974): Dynamic stability of an isentropic shear layer in a statically stable medium. *J. Atmos. Sci.* **31**, 483-492.
- Gossard, E. E. and W. H. Hooke (1975): *Waves in the Atmosphere: Atmospheric infrasound and Gravity waves. Their generation and propagation*. Elsevier Scientific Publishing Com. 456 pp.
- Herron, T. J. and I. Tolstoy (1969): Tracking jet stream winds from ground level pressure signals. *J. Atmos. Sci.* **26**, 266-269.
- Holmboe, J. (1962): On the behaviour of symmetric waves in stratificated shear layers. *Geophys. Publ.* XXIV (2), 68-113.
- Holton J. R. (1979): *An Introduction to Dynamic Meteorology*. 2nd Edition. Academic Press 391 pp.
- Hooke, W. H. and K. R. Hardy (1975): Further study of the atmospheric gravity waves over the eastern seaboard on 18 March 1969. *J. Appl. Meteor.* **14**, 31-38.
- Hooke W. H. (1986): Gravity Waves. En *Mesoscale Meteorology and Forecasting*. Ed. by P. S. Ray. Amer. Meteor. Soc. 272-288.
- Johnson, N. (1929): Atmospheric oscillation shown by the microbarograph. *Quart. J. Roy Meteor. Soc.* **55**, 19-30.
- Jordan, A. R. (1972): Atmospheric gravity waves from winds and storms. *J. Atmos. Sci.* **29**, 445-456.
- Klemp, J. B. and Lilly (1978): Numerical simulation of Hydrostatic Mountain Waves. *J. Atmos. Sci.* **35**, 78-107.
- Koch, S. E., R. E. Golus and P. B. Dorian (1988): Mesoscale gravity wave event observed during CCOPE. Part II: Interaction between mesoscale convective systems and the antecedent waves. *Mon. Wea. Rev.* **116**, 2545-2569.
- Koch, S. E. and P. B. Dorian (1988): A mesoscale gravity wave event observed during CCOPE. Part III: Wave environment and probable source mechanism. *Mon. Wea. Rev.* **116**, 2570-2592.
- Lalas, D. P. and F. Einaudi (1976): On the characteristics of gravity waves generated by atmospheric shear layers. *J. Atmos. Sci.* **33**, 1248-1259.
- Lindzen, R. S. and K. K. Tung (1976): Banded convective activity and ducted gravity waves. *Mon. Wea. Rev.* **104**, 1602-1617.
- Monserrat, S. and C. Ramis (1990): Dynamic stability of a three-layer model with discontinuous profiles of wind and temperature. *J. Atmos. Sci.* **47**, 2108-2114.
- Monserrat, S. (1991): Tropospheric gravity waves in the western Mediterranean and the "rissaga" phenomenon. PhD thesis, Universitat de les Illes Balears.
- Monserrat, S., C. Ramis and A. J. Thorpe (1991a): Large-amplitude pressure oscillations in the western Mediterranean. *Geophys. Res. Lett.* **18**, N2, 183-186.
- Monserrat, S., A. Ibbetson and A. J. Thorpe (1991b): Atmospheric gravity waves and the "rissaga" phenomenon. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **117**, 553-570.
- Orlanski, I. (1975): A rational subdivision of scales for atmospheric process. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* **56**, 527-530.
- Orlanski, I. and L. J. Polinski (1983): Ocean response to mesoscale atmospheric forcing. *Tellus* **35A**, 296-323.
- Pecnick, M. J. and J. A. Young (1984): Mechanics of a strong subsynoptic gravity wave deduced from satellite and surface observations. *J. Atmos. Sci.* **41**, 1850-1862.
- Queney, P. (1948): The problem of airflow over mountains: A summary of theoretical studies. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* **29**, 16-26.
- Ramis, C. y A. Jansá (1983): «Condiciones meteorológicas simultáneas a la aparición de oscilaciones del nivel del mar en el Mediterráneo occidental». *Rev. Geofís.* **39**, 35-42.
- Ramis, C. y A. Jansá (1990): «Situación meteorológica a escala sinóptica y a mesoscala simultánea a la aparición de las "rissagas"». En *Les rissagues de Ciutadella i altres oscil·lacions de nivell de la mar de gran amplitud a la Mediterrània*, editado por el Institut Menorquí d'Estudis, pp. 27-38. Menorca.
- Rayleigh, J. W. S. (1945): *The theory of Sound Vol II*. Dover (reprint of 2nd edition of 1894), 504 pp.

- Rees, J. M. and S. D. Mobbs (1988): Studies of internal gravity waves at Halley Base, Antarctica, using wind observations, **114**, 939-966.
- Richard, E., P. Mascart and E. C. Nickerson (1989): On the role of surface friction in downslope windstorms. *J. Appl. Meteor.* **28**, 241-251.
- Rossby, C. G. (1938): On the mutual adjustment of pressure and velocity distribution on certain simple current system, 2. *J. Marine. Res.* **1**, 239-263.
- Samah, A. (1990): Observations of gravity waves at atmospheric fronts, Ph.D. thesis. University of Reading.
- Scorer R. S. and H. Klieforth (1959): Theory of mountain waves of large amplitude. *Quart. J. Roy Meteor. Soc.* **85**, 131-143.
- Stobie, J. G., F. Einaudi and L. W. Uccellini (1983): A case study of gravity waves-convective storms interaction: 9 May 1979. *J. Atmos. Sci.* **40**, 2804-2830.
- Taylor, G. I. (1931): Effect of variation of density on the stability of superposed streams of fluid. *Proc. Roy. Soc. London*, **A132**, 499-523.
- Tintoré, J., D. Gomis, S. Alonso and D. P. Wang (1988): A Theoretical Study of large sea-level oscillations in the western Mediterranean. *J. Geophys. Res.* **C9**, 10797-10803.
- Thompson P. D. (1961): *Numerical Weather Analysis and Prediction*. Macmillan.
- Uccellini, L. W. (1975): A case study of apparent gravity wave interaction of severe convective storms. *Mon. Wea. Rev.* **103**, 497-513.
- Uccellini, L. W. and S. E. Koch (1987): The Synoptic Setting and Possible Energy Sources for Mesoscale Wave Disturbances. *Mon. Wea. Rev.* **115**, 721-729.
- Williams, D. T. (1953): Pressure wave observations in the central midwest, 1952. *Mon. Wea. Rev.* **81**, 278-289.
- Williams, D. T. and A. M. Hori (1970): Formation of hydraulic jump in a rotating system. *J. Geophys. Res.* **75**, 2813-2821.