Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas

por

Diego Córdoba, Marco Antonio Fontelos y José Luis Rodrigo

Introducción

Durante los últimos siglos las Ecuaciones en Derivadas Parciales han constituido, y lo seguirán haciendo en el futuro, una de las áreas más importantes de las matemáticas. El cálculo del siglo XX con la noción de solución débil, la teoría de las distribuciones, los espacios de Sobolev y la transformada de Fourier, propició un notable desarollo, sobre todo en la teoría lineal, a través del cálculo microlocal (operadores pseudodiferenciales e integrales de Fourier) que permitió entender problemas lineales tan importantes como son los problemas elípticos con valores en la frontera, la caracterización de la solubilidad local, la hipoelipticidad, ... Entre los principales artistas involucrados cabe mencionar a A. Calderón, H. Lewy, L. Hörmander, L. Nirenberg, J. Kohn y C. Fefferman (entre otros), siendo L. Hörmander quien en su monumental obra "The Analysis of Linear Partial Differential Operators" ha escrito el compendio de todos esos resultados. Por otro lado los trabajos de E. di Giorgi, e independientemente de J. Nash, establecieron los cimientos de la teoría de regularidad de las ecuaciones elípticas y parabólicas no lineales, dando respuesta a uno de los problemas planteados por D. Hilbert en su celebrado discurso del Congreso Internacional de Paris (1900). L. Caffarelli culminó el trabajo pionero de Stamppachia, Nirenberg, Lions, Friedman ..., desarrollando las ideas de E. di Giorgi para atacar el difícil problema de la regularidad de las fronteras libres, los problemas de transición de fase, las ecuaciones de Monge-Ampere, etc. que configuran también una teoría bastante completa de las ecuaciones elípticas no lineales.

En estos comienzos del siglo XXI la frontera más activa del territorio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales tiene un amplio frente en el dominio hiperbólico y parabólico no lineal. El caso más notable es quizás el de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos: las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes.

La mecánica de fluidos es un campo excepcionalmente amplio, que abarca tres estados de la materia (líquido, gas y plasma). Las situaciones físicas en las cuáles interviene un fluido son innumerables y la dinámica del mismo puede depender de factores tales como la temperatura, la gravedad o la presencia de un campo magnético. Es por ello que el estudio de su evolución constituye un tema central en Física e Ingeniería. Sus problemas están en la interfaz entre el análisis matemático, el análisis numérico y la física de los medios continuos. Por consiguiente hay siempre que estar atento a los resultados de las simulaciones numéricas y, por supuesto, a los logros experimentales obtenidos en los laboratorios.

Pero a pesar de su importancia, el análisis de los fluidos tropieza con enormes dificultades de naturaleza matemática. Al contrario de lo que ocurre con otras teorías clásicas como la electromagnética o cuántica, descritas por ecuaciones en derivadas parciales lineales (las de Maxwell y Schrödinger, respectivamente), el movimiento de los fluidos está descrito por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que no son lineales. Es por ello que la comprensión de fenómenos de gran impacto en nuestra vida cotidiana, como el de la turbulencia, no ha alcanzado aún el nivel de otras teorías clásicas. Ya a Leonardo da Vinci (ver fig. 1) le llamó la atención la complejidad que puede alcanzar el movimiento caótico de los fluidos cuando estos entran en un régimen que, en el lenguaje moderno, se denomina turbulento. Podemos citar al respecto los siguientes comentarios:

Figura 1: "Observad el movimento de la superficie del agua, que se asemeja al del cabello, que tiene dos movimientos, de los cuales uno es causado por su propio peso y el otro por la dirección de los remolinos; por tanto el agua tiene movimientos rotatorios, una parte de los cuales se debe a la corriente principal, y la otra a un movimiento inverso y aleatorio". *Leonardo da Vinci* 1510.

- El premio Nobel Richard Feynman que denominó la turbulencia como "the most important unsolved problem of classical physics".

- El matemático y premio Nobel J. Nash escribió: "The open problems in the area of non-linear partial differential equations are very relevant to applied mathematics and science as a whole, perhaps more so than the open problems in any other area of mathematics, and this field seems poised for rapid development. Little is known about the existence, uniqueness and smoothness of solutions of the general equations of flow for a viscous, compressible, and heat conducting fluid. Also, the relationship between this continuum description of a fluid and the more physically valid statistical mechanical description is not well understood. Probably one should first try to prove existence, smoothness, and unique continuation (in time) of flows, conditional on the non-appearance of certain gross types of singularity, such as infinities of temperature or density. A result of this kind would clarify the turbulence problem".

- Se atribuye a A. Einstein la siguiente frase: "Voy a preguntar a Dios dos cuestiones: el por qué de la relatividad y el por qué de la turbulencia. Soy optimista en obtener respuesta a la primera cuestión".

Fue Leonard Euler quien, en 1755, escribió por primera vez las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido no viscoso. Setenta años después C. Navier e, independientemente, G. Stokes introdujeron el término de viscosidad en las ecuaciones que hoy denominamos de Navier-Stokes. A fecha de hoy, casi doscientos años después, la mera existencia de soluciones únicas no está garantizada, por lo que, en principio, las soluciones de dichas ecuaciones podrían desarrollar singularidades, es decir valores no acotados de la velocidad o de sus derivadas, o estructuras casi singulares en tiempo finito.

A finales del siglo pasado, y con ocasión del cambio de milenio se reflexionó sobre las cuestiones científicas más relevantes que quedaban por resolver y que debían concentrar los esfuerzos intelectuales en años venideros. A este respecto el problema de existencia de singularidades para el sistema de Navier-Stokes juega un papel estelar como acreditan las siguientes referencias:

- En 1998 el Prof. Smale enunció los que en su opinion eran los 18 problemas matemáticos a resolver en el siglo XXI. El enunciado arriba aparece como el problema número 15 (véase el texto de su conferencia en La Gaceta de la RSME Vol. **3** (2000) 3.

- K.Moffatt: En el artículo "Some remarks on topological fluid mechanics". (R.L. Ricca (ed.) *An introduction to the geometry and topology of fluid flows.* Kluwer Academic Publ. (2001), 3-10) también destaca el problema como uno de los fundamentales en mecánica de fluidos.

- S. Klainerman ("Great problems in nonlinear evolution equations". *The AMS Millenium Conference in Los Angeles, August 2000*) afirma que el estudio de la regularidad de las soluciones de Navier-Stokes es uno de los desafíos más importantes en el área de las Ecuaciones en Derivadas Parciales para el siglo XXI.

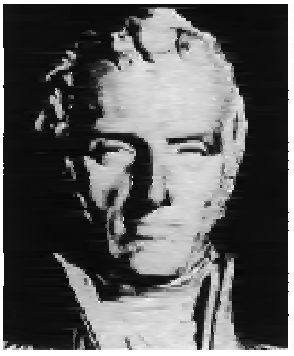
- El *Instituto Clay* lo ha distinguido entre los 7 problemas por cuya solución se ofrece un millon de dólares (`www.claymath.org`).

Además de las cuestiones de regularidad para las soluciones de Navier-Stokes otro de los temas importantes en la mecánica de fluidos es el de las inestabilidades hidrodinámicas. En particular, nosotros hablaremos de aquellas que acontecen en la evolución de las superficies de separación de dos fluidos inmiscibles (que no se pueden mezclar –como el aceite y el agua–) llamadas interfases. Estas inestabilidades se producen al perturbar ligeramente situaciones de equilibrio y pueden dar lugar a la formación de singularidades en tiempo finito; es decir, puntos en los que el campo de velocidades o la geometría de la interfase pierden la regularidad que tenían en el tiempo inicial.

Aunque nuestro objetivo esencial es el de hablar de las inestabilidades asociadas a la evolución de interfases, trataremos también dos problemas asociados especialmente interesantes:

1) La cuestión, esencialmente matemática, de existencia y unicidad de soluciones al sistema de ecuaciones que rigen la evolución de la interfaz.

2) La cuestión del cálculo de las soluciones de equilibrio para interfases fluidas.



Figuras 2 y 3: L. Euler (1707-1783), C. Navier (1785-1836) y G. Stokes (1819-1903)

Ambas cuestiones dan lugar a problemas apasionantes en los ámbitos del análisis funcional y el cálculo de variaciones. Como puede imaginar el lector, el ámbito de aplicación práctica del cálculo de la evolución de una interfase fluida es inmenso: desde los problemas de atomización de una masa de combustible al entrar en la cámara de combustión de un motor hasta el problema de generar una gota de tinta de un tamaño dado en una impresora, por poner dos ejemplos. El tratamiento del problema a este nivel púramente práctico exige la creación de técnicas numéricas eficientes. Esto da lugar a todo un abanico de cuestiones en el ámbito del análisis numérico y la computación científica de los que no podemos hablar por razones de espacio (para más detalles ver, por ejemplo, [38]).

A continuación explicaremos la naturaleza de los problemas propuestos y algunos problemas relacionados. La mecánica de los fluidos con su larga historia es un área señera a los que han contribuido matemáticos, físicos e ingenieros. Nosotros, claro está, no podemos hacer aquí justicia a todo ese caudal de ingenio, mencionando nombres, resultados o publicaciones. Por el contrario, este modesto artículo pretende tan solo señalar un área concreta que nos ha tenido ocupados recientemente y es con el propósito de enmarcarla dentro de la mecánica de fluidos por lo que hemos mencionado a algunos de los principales artistas. Nuestro trabajo en estos temas se ha beneficiado de la colaboración con A. Córdoba, C. Fefferman y J.J. López Velázquez cuyas ideas y visión de las matemáticas han compartido con nosotros.

1 Ecuaciones de Euler y Navier-Stokes para un fluido incomprensible

La descripción matemática de un fluido incompresible (es decir, de densidad constante que tomaremos igual 1 en lo que sigue) en las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes se hace mediante 1) el campo de velocidades $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ (n= 2 ó 3) que determina la velocidad que tendría una partícula en cada punto x del espacio y cada tiempo t y 2) el campo de presiones $p = p(x,t)$ en el seno del fluido. Las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes incompresibles son un sistema que se deduce, a partir de la aplicación de la segunda ley de Newton, de igualar la aceleración de las partículas a la suma de fuerzas que actuan sobre ellas: las variaciones espaciales (gradiente) de la presión, las fuerzas de rozamiento (viscosidad) y las posibles fuerzas externas como la gravitatoria. A estas ecuaciones hay que añadir la ley de conservación de la masa que implica que el campo de velocidades ha de ser de divergencia nula. El sistema resultante es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{1\leq j\leq n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f_i, \qquad i = 1,..,n \qquad (1) \\ div\, u &:= \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}$$

donde ν es el coeficiente de viscosidad cinemática y $f = f_i(x,t)$ representa un campo de fuerzas externo. El término a la izquierda de la igualdad en (1) representa la componente iésima de la aceleración $a_i(t)$ de una partícula a lo largo de su trayectoria $X(t)$:

$$a_i(t) \equiv \frac{du_i(X(t),t)}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{1\leq j\leq n} \frac{dX_j}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{1\leq j\leq n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \qquad (2)$$

y es el que introduce la no-linealidad del sistema, originando todas las dificultades matemáticas mencionadas anteriormente. En el sistema de ecuaciones, $\nu = 0$ corresponde a la ecuación de Euler, mientras que $\nu \neq 0$ corresponde a Navier-Stokes. La diferencia más importante entre las dos ecuaciones radica en que para Euler la energía se conserva y para Navier-Stokes decrece, resultado que se obtiene fácilmente al multiplicar las ecuaciones por el vector velocidad e integrar en el dominio Ω (para simplificar tomamos $\Omega = R^n, Z^n$). El término no-lineal desaparece debido a que la velocidad es de divergencia cero. Se obtiene la siguiente fórmula

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx + \nu \int_{t_0}^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dx ds = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t_0)|^2 dx. \qquad (3)$$

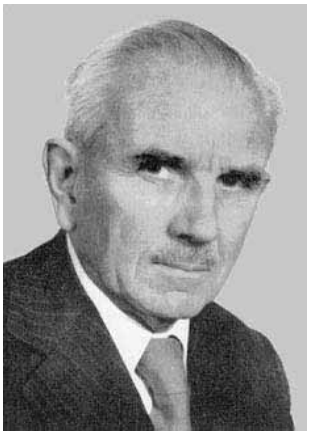


Figura 2: J. Leray (1906-1998)

El trabajo de J. Leray fue pionero en hacer un análisis matemático de las ecuaciones de Navier-Stokes. En 1933 [1] probó la existencia local de soluciones regulares donde el tiempo de existencia depende del dato inicial. Introdujo, en 1934 [2], la noción de solución débil, antes del desarrollo de la teoría de distribuciones por L. Schwartz (1950) y poco antes de que S.L. Sobolev (1936) definiera los famosos espacios que llevan su nombre, y probó la existencia de soluciones débiles para Navier-Stokes. No obstante la unicidad de las soluciones débiles sigue siendo un problema abierto. En cambio para Euler la unicidad es falsa (véanse [4] y [3]). Uno de los problemas más importantes, por sus consecuencias dentro de la física y de la ingeniería, es el problema de existencia de singularidades para las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes en dimensión $n = 3$. La presencia de dichas singularidades fue conjeturada por J. Leray como posible explicación del fenómeno de la turbulencia. De hecho Leray llamó a sus soluciones débiles "soluciones turbulentas", anticipando una conexión entre singularidades de las soluciones débiles y el fenómeno de la turbulencia.

En 1933 Wolibner [20] y Leray [1] probaron que en dimensión dos las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes respectivamente no producen singularidades y las soluciones son globales.

El estudio matemático de las ecuaciones que gobiernan la evolución de los fluidos incompresibles, viscosos o no viscosos, constituye un problema muy complicado de abordar analíticamente debido a la inestabilidad y no-linealidad del sistema. A continuación daremos una breve descripción de propiedades y resultados sobre la formación de singularidades.

1.1 FORMACIÓN DE SINGULARIDADES: TORBELLINOS

Tal como ya observó Leonardo da Vinci, el régimen turbulento se caracteriza por la aparición de remolinos (torbellinos) a muy diversas escalas espaciales. La aparición de estructuras "rotantes" en el seno de un campo vectorial sugiere la introducción de un operador vectorial clásico que las caracteriza: el rotacional. En el contexto de la mecánica de fluidos al rotacional del campo de velocidades se le denomina vorticidad y es un vector que juega un papel crucial como veremos.

La vorticidad se define por tanto como $\omega = \nabla \times u$ y el sistema (1) en dimensión $n = 3$ pueden escribirse en términos del vector ω como

$$\omega_t + u \cdot \nabla\omega = (\nabla u)\omega + \nu\triangle\omega, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot u = \nabla \cdot \omega = 0.$$

Usando la ley de Biot-Savart ($\Omega = R^3, Z^3$), la velocidad se recupera de la vorticidad por medio del operador

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{y \times \omega(x+y,t)}{|y|^3} dy.$$

El operador $D_t \equiv \partial_t + u \cdot \nabla$ es la derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias y recibe el nombre de derivada material. Fijándose en la ecuación (4), con viscosidad $\nu = 0$, es natural hacer el siguiente argumento heurístico

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega^2$$

ya que ∇u tiene el mismo orden que la vorticidad. Esta ecuación diferencial ordinaria produce singularidades en tiempo finito. Pero en realidad, ∇u se puede escribir como una convolución de la vorticidad con un núcleo homogéneo de orden -3 y con media cero en la esfera unidad. Además, debido a la incompresibilidad del fluido, podría existir suficiente cancelación en el producto $(\nabla u)\omega$ para prevenir una singularidad.

En el estudio de la ecuación de Euler, los resultados en dimensión $n = 2$, donde la teoría desarrollada hasta el momento ha sido bastante fructífera, no son un buen modelo para dimensión $n = 3$. La razón estriba en que la ecuación de la vorticidad, en dimensión $n = 2$, tiene la forma

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\,\omega = 0, \tag{5}$$

$$u = \nabla^\perp \psi \equiv (-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}) \quad \text{donde} \quad \omega = \triangle \psi$$

y de aquí se deduce que las normas L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ de ω se conservan para todo tiempo. Además en el siguiente cálculo se muestra que las derivadas de la velocidad están acotadas por una exponencial: aplicando el operador $\nabla^\perp$ a la ecuación (5), se obtiene

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\,\nabla^\perp \omega = (\nabla u)\nabla^\perp \omega. \tag{6}$$

Invirtiendo el Laplaciano se obtiene

$$\psi(x,t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \omega(x+y,t) log|y| dy$$

y como $u = \nabla^\perp \psi$ resulta que

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \omega(x+y,t) \cdot \frac{(-y_2, y_1)}{|y|^2} dy.$$

Derivando la expresión anterior aparece la relación entre las derivadas de la velocidad y las de la vorticidad

$$(\partial_{x_i} u)(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \partial_{x_i}\omega(x+y,t)\cdot\frac{(-y_2,y_1)}{|y|^2}dy.$$

Usando la propiedad de que $\int_\Omega |\omega(x,t)|^p dx$ $(1 \le p \le \infty)$ se conserva para todo tiempo, se acotan las derivadas de la velocidad por

$$|(\partial_{x_i} u)(x,t)| \le C\log(sup|\nabla\omega| + 1).$$

La ecuación (6) puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\cdot\nabla\right)|\nabla\omega| = \alpha|\nabla\omega|$$

donde α viene dada por

$$\alpha = (\nabla u)\xi\cdot\xi.$$

En este caso, $\xi = \frac{\nabla^\perp\omega}{|\nabla^\perp\omega|}$ es la dirección del vector $\nabla^\perp\omega$. Por lo tanto

$$|\frac{d}{dt}||\nabla\omega||_{L^\infty}| \le C||\nabla\omega||_{L^\infty}\log(||\nabla\omega||_{L^\infty}+1)$$

y $||\nabla\omega||_{L^\infty}$ está acotada por una doble exponencial en tiempo. De este argumento puede concluirse que las derivadas de la velocidad están acotadas por una exponencial. Esta es la mejor cota superior que se conoce siendo la existencia de soluciones con energía finita con crecimiento exponencial un problema abierto.

En dimensión $n = 3$ Euler tiene la propiedad de que las líneas de vorticidad se mueven con el fluido. Consideremos la curva lisa C= $\{y(s) \in R^3 : 0 < s < 1\}$: diremos que es una línea de vorticidad en tiempo t si es tangente a la vorticidad en cada uno de sus puntos; eso quiere decir que

$$\frac{dy}{ds}(s) = \lambda(s)\omega(y(s),t) \quad \text{para algún } \lambda(s) \neq 0.$$

Una cuenta muy sencilla muestra que las líneas de vorticidad, de la solución de la ecuación incompresible tridimensional de Euler, se mueven con el fluido: la curva

$$C(t) = \{X(y(s),t) \in R^3 : 0 < s < 1\}$$

satisface

$$\frac{dX}{ds}(y(s),t) = \lambda(s)\omega(X(y(s),t)) \quad \text{para algún } \lambda(s) \neq 0.$$

Un tubo de vorticidad está formado por la unión de líneas de vorticidad. En las simulaciones numéricas se observa que estos tubos se doblan, tuercen y se contraen. Una singularidad puede formarse por la colisión de dos líneas de vorticidad, lo que significa que las trayectorias de dos partículas colisionen en tiempo finito. La trayectoria $X(q,t)$ se obtiene de resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{dX(q,t)}{dt} &= u(X(q,t),t) \\ X(q,0) &= q \end{aligned}$$

entonces

$$(X(q,t)-X(p,t))_t \leq |X(q,t)-X(p,t)||\nabla u|_{L^\infty}$$

$$|X(q,t)-X(p,t)| \geq |X(q,0)-X(p,0)|e^{-\int_0^t |\nabla u|_{L^\infty} ds}.$$

Este sencillo argumento nos dice que para que dos partículas colisionen en tiempo T se tiene que dar la siguiente condición

$$\int_0^T |\nabla u|_{L^\infty} ds = \infty. \tag{7}$$

El clásico criterio para la formación de singularidades en fluidos es el teorema de Beale, Kato y Majda [21] el cual mejora la estimación (7) y además sirve para cualquier tipo de singularidad:

$$\textit{Singularidad en tiempo } T \textit{ si y solo si } \int_0^T sup_x|\omega|dt = \infty.$$

Combinando técnicas analíticas de integrales singulares con argumentos geométricos, Constantin, Fefferman y Majda [9] probaron que si la dirección del vector vorticidad $\xi(x) = \frac{\omega(x)}{|\omega(x)|}$ se mantiene lisa en regiones donde la vorticidad es alta, entonces no se puede producir una singularidad.

Estos resultados iluminan la naturaleza de los posibles escenarios geométricos donde la dinámica del fluido puede producir singularidades permitiendo que nos centremos en el estudio de casos menos generales. Por ejemplo, una forma de que se produzca una singularidad es que el grosor de un tubo de vorticidad se haga cero en tiempo finito, y se desconoce si esto puede llegar a ocurrir. En el trabajo [15] se estudia la evolución del volumen de un *tubo regular* que se mueve con el fluido. Un *tubo regular* es un conjunto abierto $\Omega_t \subset Q$ parametrizado por el tiempo $t \in [0,T)$, teniendo la forma

$$\Omega_t = \{(x_1,x_2,x_3) \in Q : \theta(x_1,x_2,x_3,t) < 0\}$$

con

$$\theta \in C^1(Q \times [0,T)) \text{ y } Q = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset \mathbb{R}^3,$$

y satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$|\nabla_{x_1,x_2}\theta| \neq 0 \text{ para } (x_1,x_2,x_3,t) \in Q \times [0,T),\ \theta(x_1,x_2,x_3,t) = 0;$$
$$\Omega_t(x_3) := \{(x_1,x_2) \in I_1 \times I_2 : (x_1,x_2,x_3) \in \Omega_t\}$$

y $\Omega_t(x_3)$ es un conjunto no-vacio, para todo $x_3 \in I_3$, $t \in [0,T)$;

$$\overline{\Omega_t(x_3)} \subset \text{ interior } (I_1 \times I_2)$$

para todo $x_3 \in I_3$, $t \in [0,T)$.

El resultado que obtenemos es el siguiente:

TEOREMA: *Sea $\Omega_t \subset Q(t \in [0,T))$ un tubo regular que se mueve con un vector de velocidad $u(x,t)$ de divergencia cero y clase C^1. Si*

$$\int_0^T \sup_{x \in Q} |u(x,t)|dt < \infty$$

entonces

$$\liminf_{t \to T^-} \text{Vol}(\Omega_t) > 0.$$

En particular si un tubo de vorticidad se mantiene transversal al plano (x_1,x_2) entonces una condición necesaria para que el volumen se haga cero es que la velocidad diverja. Basados en el análisis a través de estimaciones de energía obtenemos criterios de explosión, pudiendo medir la dimensión del conjunto de puntos donde hay singularidades y así simplificar el escenario geométrico de las posibles singularidades (véase [19]).

En el caso de un fluido viscoso ($\nu > 0$) podemos sacar partido al operador Laplaciano; por ejemplo de la desigualdad (3) se deduce que la integral

$$\int_{t_0}^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds$$

está acotada. Los criterios de explosión son bastante mejores en este caso

- $\int_0^T |u(x,t)|^2_{L^\infty} dt = \infty \Leftrightarrow$ Singularidad en t=T (Serrin 1962) [7].
- $\int_0^T |u(x,t)|^2_{BMO} dt = \infty \Leftrightarrow$ Singularidad en t=T (Kozono y Taniuchi 2000) [8].

Además permite estudiar la dimensión de Hausdorff del conjunto $\{(x,t) \in \Omega \times [0,T]; \|u(t)\| = \infty\}$ (véase [5] y [10]). Por otra parte con la viscosidad se pierde la intuición geométrica ya que las líneas de vorticidad no se mueven con el fluido.

A continuación estudiamos la formación de singularidades en modelos unidimensionales y en fluidos incompresibles bidimensionales.

1.2 Modelos unidimensionales

En dimensión $n = 1$ el único operador que tiene la propiedad de ser la convolución de una función con un núcleo homogéneo de orden -1 y con media cero en la esfera unidad es la transformada de Hilbert. Constantin, Lax y Majda [22] estudiaron el siguiente modelo

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = H(\omega)\omega$$

$$\omega(x,0) = \omega_0(x)$$

donde H es la transformada de Hilbert

$$H(\omega) := \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(y)}{x-y} dy$$

y la velocidad se define como

$$u = \int_{-\infty}^{x} \omega(y) dy.$$

Esta ecuación puede resolverse explícitamente; la solución es la siguiente

$$\omega(x,t) = \frac{4\omega_0(x)}{[2 - t(H\omega_0)(x)]^2 + t^2\omega_0^2(x)}$$

ω se hace infinito en tiempo $T_0 \iff \exists x_0$ tal que $\omega_0(x_0) = 0$ y $(H\omega_0)(x_0) > 0$.

Schochet [14] fue el primero en añadir un término viscoso al modelo de [22], estudiando la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = H(\omega)\omega + k\omega_{xx}$$

$$\omega(x,0) = \omega_0(x)$$

demostró que las soluciones se hacen singulares en tiempo T_k con la sorpresa de que

$$T_k < T_0$$

siendo T_0 el tiempo en que la solución para $k = 0$ se hace singular.

En un reciente trabajo [18] se estudia la siguiente ecuación de transporte

$$\theta_t + u\theta_x = 0$$

donde $u = -H\theta$. Al derivar con respecto a x

$$\theta_{x\,t} + u\theta_{xx} = H\theta_x\,\theta_x,$$

se ve la similitud con (4). En las figuras 3 y 4 se representan los perfiles $\theta_x(x,t)$ y $\theta(x,t)$ con dato inicial

$$\theta_0(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2, & si \quad -1 \le x \le 1 \\ 0, & si \quad |x| > 1 \end{cases}$$

en nueve tiempos consecutivos.

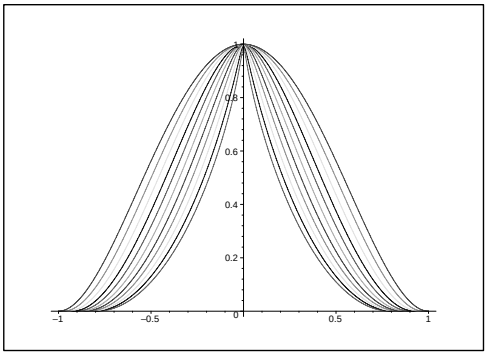


Figura 3: $\theta(x,t)$

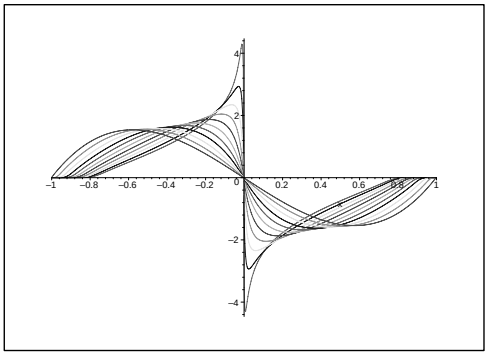


Figura 4: $\theta_x(x,t)$

En [18] se demuestra que las soluciones forman una singularidad en forma de esquina (cúspide) en $x = 0$ en tiempo finito. Dado un dato inicial positivo, simétrico con $max_x\theta_0 = \theta_0(0)$ y con soporte compacto, $\theta(x,t)$ permanece positiva, simétrica, soporte contenido en el inicial y $||\theta||_{L^2}(t) \le ||\theta_0||_{L^2}$. Para este tipo de datos, mediante uso de transformadas de Mellin, se obtiene que $||\theta_x||_{L^\infty}$ explota en tiempo finito. Si introducimos un término disipativo en la ecuación:

$$\theta_t + u\theta_x = -\nu\Lambda^\alpha\theta$$

donde Λ representa el operador $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, obtenemos $0 \le \theta(x,t) \le ||\theta_0||_{L^\infty}$, $||\theta||_{L^2}(t) \le ||\theta_0||_{L^2}$. Así, cuando $\alpha > 1$, se obtiene regularidad global, dejando como caso crítico $\alpha = 1$, para el que tenemos existencia global cuando $||\theta_0||_{L^\infty} < \nu$. Por tanto, queda sin resolver que ocurre en el caso crítico si el dato inicial cumple $||\theta_0||_{L^\infty} > \nu$ y el comportamiento de las soluciones en el caso $0 < \alpha < 1$.

1.3 Dimensión $n = 2$

En la sección anterior se han estudiado modelos unidimensionales con operadores no-locales que producen singularidades con energía finita. El siguiente paso es poder entender el comportamiento de un fluido que satisface un sistema mixto de operadores no-locales e incompresibilidad. Los siguientes modelos tienen esas dos caracteristicas:

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\,\theta = 0 \tag{8}$$

$$u = \nabla^{\perp}\psi \quad \text{donde} \quad \theta \sim A(\psi).$$

Además tienen la propiedad de que las curvas de nivel de θ se mueven con el fluido. El flujo de un fluido depende, en general, de otros factores, tales como la temperatura o la presencia de un campo magnético. Las singularidades pueden explicar la formación de frentes de aire caliente y frío, o en qué condiciones la densidad de corriente diverge en un fluido bajo un campo magnético. Algunos ejemplos de fluidos que satisfacen las ecuaciones (8) son:

1. Cuando la relación entre la función de corriente ψ y el escalar θ está dada por un operador:

- La ecuación de Euler en dimensión n=2, θ representa la vorticidad

$$\psi = -(\triangle)^{-1}\theta$$

- La ecuación quasi-geostrófica

$$\psi = -(\triangle)^{-\frac{1}{2}}\theta$$

2. Cuando la relación entre la función de corriente ψ y el escalar θ está dada por una ecuación de evolución: las ecuaciones magneto-hidrodinámicas, las ecuaciones de Boussinesq, ecuaciones de medios porosos, etc....

De todos estos modelos se desconoce la existencia de singularidades en tiempo finito. En un trabajo numérico reciente [16] hemos encontrado evidencia numérica de la existencia de singularidades para una familia de α-patches que son soluciones, en un sentido débil, de las ecuaciones (8). Estas singularidades tienen la característica de ser estables y autosimilares, y ocurren en un punto del plano en el que la curvatura explota al mismo tiempo que colapsa dos curvas de nivel. Un α-patch ($0 < \alpha \leq 1$) consiste en una región en 2D $\Omega(t)$ (acotada y conexa) que se mueve con una velocidad dada por

$$u(x(\gamma,t),t) = \frac{\theta_0}{2\pi}\int_{C(t)} \frac{\frac{\partial x}{\partial \gamma}(\gamma',t)}{|x(\gamma,t) - x(\gamma',t)|^{\alpha}} d\gamma' \tag{9}$$

donde $x(\gamma,t)$ es la posición de C(t) que es la frontera del dominio $\Omega(t)$, parametrizado con γ. La dinámica de la evolución del contorno viene dada por

$$\frac{dx(\gamma,t)}{dt} = u(x(\gamma,t),t), \tag{10}$$

y son soluciones débiles de la ecuación

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\,\theta = 0$$

$$u = \nabla^{\perp}\psi \quad y \quad \theta = -(-\triangle)^{1-\frac{\alpha}{2}}\psi.$$

El caso límite $\alpha = 0$ (2D Euler) ha sido estudiado analíticamente con éxito, por Chemin [11] y Bertozzi-Constantin [12], demostrando la existencia global de soluciones. En el caso $\alpha = 1$ (el de la ecuación quasi-geostrófica) J. L. Rodrigo [13] ha demostrado la existencia local de soluciones.

2 PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE: GOTAS Y OLAS

¿Puede el fluido desarrollar una singularidad en tiempo finito? Hasta ahora todos los teoremas van en la dirección negativa. No obstante el ejemplo más simple, que cualquiera puede experimentar en casa, es la formación de una gota de agua y su posterior ruptura. En otras palabras, un dominio $\Omega(t)$ ocupado por un fluido incompresible cambia su topología, inicialmente es simplemente conexo y posteriormente puede evolucionar a un dominio no conexo. Este fenómeno atrajo la atención de los científicos desde principios del siglo XIX, pudiendonos remontar a las observaciones experimentales de Savart (1833) [37], a los trabajos Plateau (1863) y sobre todo al primer estudio analítico de Rayleigh (1879) [23]. Los experimentos muestran que la viscosidad desempeña un papel fundamental en la geometría de la ruptura de las gotas, mientras que en el caso muy viscoso se observa la formación de filamentos muy delgados que finalmente desaparecen después de alcanzar una delgadez próxima al tamaño molecular.

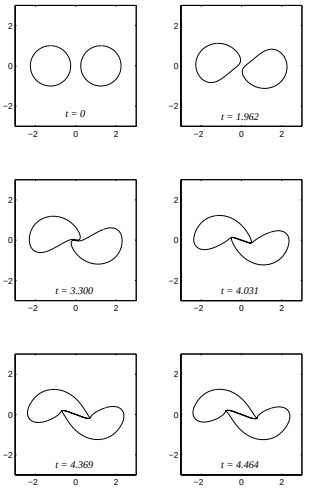


Figura 5: Formación de singularidades (esquinas) para dos α-patches. Véase [16].

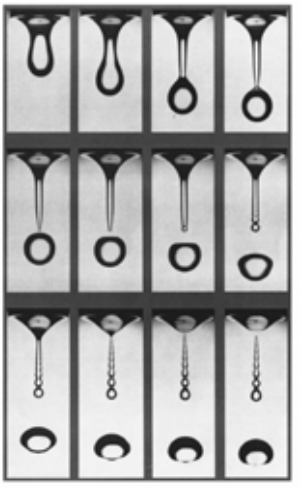


Figura 6: Evolución y ruptura de una gota de agua. La singularidad se manifiesta en un cambio de topología. Ver [49]

Supongamos dos fluidos con distintos parámetros físicos (densidad ρ, viscosidad μ) que ocupan todo el espacio y están separados por una superficie. Si dichos fluidos son inmiscibles, entonces tiene sentido plantearse cómo evoluciona la superficie de separación o interfase $\Sigma(t)$ con el tiempo. Matemáticamente, el problema se convierte en uno de frontera libre; es decir, en la resolución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, las de Navier-Stokes, en los dominios móviles interior y exterior a $\Sigma(t)$ bajo condiciones de contorno adecuadas en la propia $\Sigma(t)$.

Figura 7: Lord Rayleigh (John William Strutt, 1842-1919)

2.1 Las condiciones en la interfase de separación entre dos fluidos

En general, las tracciones ejercidas por los fluidos a ambos lados de una interfase (llamémoslos fluidos (1) y (2) respectivamente) tienen dos valores diferentes, creando una discontinuidad

$$\Delta f = f^{(1)} - f^{(2)} = (\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}) \cdot n$$

donde n es el vector unitario normal a la interfase apuntando hacia el fluido (1), $\sigma^{(1)}$ y $\sigma^{(2)}$ representan las fuerzas por unidad de área que ejercen ambos fluidos sobre la interfase. Dichas fuerzas vienen dadas por

$$\sigma_{ij}^{(k)} = -p^{(k)}\delta_{ij} + \mu_k \left(u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)} \right)$$

donde $\sigma_{ij}^{(k)}$ tiene como significado físico la componente i-ésima de la fuerza que está ejerciendo el fluido k-ésimo sobre un elemento de área cuya normal solamente tiene componente j- ésima. μ_k es la viscosidad del fluido k-ésimo.

La dirección y magnitud de la discontinuidad de la tracción interfacial Δf depende de las propiedades mecánicas de la interfase, que vienen determinadas por las propiedades físico-químicas de los fluidos. En la situación más sencilla la tracción sobre la interfase deriva de las fuerzas de tensión superficial cuyo origen físico está en la diferente atracción que experimentan las moléculas de ambos fluidos. Las fuerzas de tensión superficial se pueden visualizar como fuerzas que aparecen en la superficie y que hacen que esta se comporte como una especie de membrana elástica. Se puede mostrar que dicha fuerza es tal

que

$$\Delta f = \gamma H n \ ,$$

donde H es la curvatura media de la superficie y γ es un parámetro físico denominado coeficiente de tensión superficial. Llegamos pues a la condición

$$\left[\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}\right] n = \gamma H n \ \text{ en la interfase} \tag{11}$$

que se puede descomponer en tres condiciones escalares:

$$\begin{aligned} n^T \left[\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}\right] n &= \gamma H \\ t_1^T \left[\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}\right] n &= 0 \\ t_2^T \left[\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}\right] n &= 0 \end{aligned}$$

siendo t_1, t_2 dos vectores linealmente independientes del plano tangente a la superficie.

Naturalmente, el campo de velocidades ha de ser continuo a través de la interfase. Si denotamos por $u^{(i)}$ el campo de velocidades del fluido etiquetado como i-ésimo, tendremos pues

$$u^{(1)} = u^{(2)} \equiv u_{interfase} \ \text{ en la interfase} \ . \tag{12}$$

Finalmente, imponemos una condición cinemática en la interfase que expresa que las moléculas de la misma son fluidas; es decir, se mueven siguiendo el campo de velocidades. Esto equivale a decir que la superficie se mueve en la dirección de su normal con una velocidad V_N dada por

$$V_N = u_{interfase} \cdot n \ . \tag{13}$$

Resumiendo, el problema de evolución de una interfase fluida que delimita dos fluidos 1 y 2 consiste en la resolución de los sistemas

$$\begin{aligned} \rho_i \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} + \left(u^{(i)} \cdot \nabla\right) u^{(i)} \right) &= -\nabla p^{(i)} + \mu_i \Delta u^{(i)} + F \ , \\ \nabla \cdot u^{(i)} &= 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \end{aligned}$$

en los respectivos dominios junto con las condiciones (11)-(13) a imponer en la interfase.

En el caso de que tengamos un solo fluido que ocupa un dominio $\Omega(t)$ rodeado por vacío (esto se puede asumir, aproximadamente, en el caso de un líquido como el agua rodeado por un gas como el aire) debemos resolver el sistema de Navier-Stokes en dicho dominio e imponer las condiciones (11), (13) con $\sigma^{(2)} = -p_0 I$.

2.2 Superficies de equilibrio

Las soluciones estacionarias son las correspondientes a $u^{(i)} = 0$ y la superficie resultantes se denominan superficies capilares. Consideraremos dos casos concretos: en ausencia de fuerzas externas y bajo la acción de la gravedad. En el primer caso, de la ecuación de Navier-Stokes se deduce:

$$p^{(2)} - p^{(1)} \equiv \Delta P = Const.$$

lo que nos lleva, a partir de la condición de contorno (11), a la relación

$$H = \frac{\Delta P}{\gamma} = Const. \; ; \tag{14}$$

es decir, la interfase es una superficie de curvatura media constante. Un estudio extensivo de las soluciones de (14) se encuentra en [33]. Mencionemos tres ejemplos concretos interesantes. El primero es el de una superficie con las dos curvaturas principales iguales:

$$R_1 = R_2 = \frac{2\gamma}{\Delta P}$$

es decir, la esfera. El segundo es el de una superficie con una curvatura infinita y la otra constante:

$$R_1 = +\infty \; , \; R_2 = \frac{\gamma}{\Delta P},$$

es decir, el cilindro. El tercero es el de una superficie con

$$R_1 = R_2 = +\infty, \; \Delta P = 0,$$

es decir, el plano.

Bajo la acción de la fuerza de la gravedad, la ecuación de Navier-Stokes se convierte en la ecuación de la hidrostática,

$$-\nabla p + \rho g = 0.$$

Suponiendo que la gravedad está dirigida en la dirección vertical y que la coordenada a lo largo de dicha dirección es z, tendremos un salto de presiones en un punto (x, y, z) de la interfase dado por

$$\Delta P = \pm(\rho^{(2)} - \rho^{(1)})gz, \tag{15}$$

donde el signo del término de la derecha vendrá determinado en función de que la fuerza gravitatoria tenga la dirección de crecimiento de z o la opuesta. Tras un reescale de coordenadas, la ecuación (14) se escribe como

$$H = \pm z \text{ en los puntos } (x, y, z) \text{ de la interfase.} \tag{16}$$

Tanto en el caso de la ecuación (14) como en el de la ecuación (16), al parametrizar la superficie, el hecho de que la curvatura media conlleva derivadas segundas de los parámetros conduce a problemas de tipo elíptico cuasilineal. Las ecuaciones deben ser complementadas con condiciones de contorno provenientes de la física. Si suponemos el caso de una gota que pende del techo o está apoyada en el suelo, es natural imponer como condición el ángulo del contacto α de la interfase con el sólido en la línea de contacto Γ. Dicho ángulo de contacto es un parámetro físico fundamental que depende de la naturaleza de los fluidos y el sólido involucrados. Una segunda condición puede ser la posición de la línea de contacto o, más natural, el volumen total de la gota.

Es interesante hacer notar que el problema descrito arriba admite una formulación variacional. Si denotamos por Ω el dominio (de volumen prescrito) ocupado por el fluido (1) y por $\partial_f\Omega$ la interfase que le separa del fluido (2), entonces dicha interfase es un extremo del siguiente funcional de energía:

$$E \equiv |\partial_f\Omega| - \cos\alpha\,|\Gamma| + \frac{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}{\gamma}\int_\Omega g \cdot x dV$$

siendo Γ la línea de contacto de la interfase con el sólido o, si se prefiere, el borde de la superficie de contacto del fluido con el sólido. Remitimos a [33] para más información sobre las superficies capilares en equilibrio y a [34] para una exposición de problemas abiertos importantes en el campo. Un problema relacionado con el anterior tiene lugar cuando uno prescribe Γ y no hay fuerzas externas actuando. Entonces el funcional de energía es simplemente

$$E \equiv |\partial_f\Omega| \ .$$

El hallar los extremos de este funcional constituye el célebre problema de superficies mínimas. No es una exageración decir que la resolución de este problema ha guiado el desarrollo de una parte importante de la matemática del siglo XX. Sobre todo en el terreno de las ecuaciones en derivadas parciales, la geometría (ver a este respecto el reciente artículo de J. Gonzalo, LA GACETA DE LA RSME **8** (2005) 2) y el análisis.

2.3 RESULTADOS DE EXISTENCIA, UNICIDAD Y REGULARIDAD DE SOLUCIONES PARA EL PROBLEMA DE EVOLUCIÓN

Sorprendentemente, a pesar de la importancia práctica que tienen los problemas que involucran el movimiento de interfases, la teoría matemática básica sobre el "correcto planteamiento" del problema de evolución enunciado arriba no está complentamente asentada. Mencionaremos a continuación los resultados fundamentales existentes, todos ellos acerca de un único fluido rodeado por el vacío y relativamente recientes:

- En un artículo publicado en 1977 (ver [44]), el matemático ruso V. A. Solonnikov estableció la existencia de soluciones para el problema de

evolución en el caso de un dominio $\Omega(0)$ inicialmente acotado. El resultado es local en tiempo, es decir, las soluciones son solamente válidas para un intervalo de tiempo $[0, T]$ suficientemente pequeño. Al campo inicial de velocidades se le pide estar en $C^{2+\varepsilon}(\Omega(0))$ y tener divergencia nula. La solución está en $C^{2+\varepsilon,1+\frac{\varepsilon}{2}}(\bigcup_{t\in[0,T]} \bar{\Omega}(t) \times \{t\})$. El borde de Ω conserva la regularidad que tenía inicialmente.

- Cuando $\Omega(0)$ es una capa infinita horizontal de fluido con un fondo rígido (pensemos en un mar infinito) con la fuerza gravitatoria actuando en dirección vertical, Beale en 1981 (ver [45] y [46]) estableció la estabilidad del estado de equilibrio consistente en una interfase completamente horizontal. Es decir, perturbaciones suficientemente pequeñas de esta solución de equilibrio decaen en el tiempo y el sistema converge a la solución de equilibrio para tiempo largos.

Los resultados de Beale y Solonnikov usan de manera esencial el efecto regularizante de la viscosidad, manifiesto en las ecuaciones a través de las derivadas de mayor orden, y de la tensión superficial. Como algunos de los efectos físicos más interesante, como las olas, involucran fluidos muy poco viscosos, interesa conocer si las ecuaciones son resolubles cuando $\nu = 0$.

- En dos artículos publicados en 1997 y 1999 (ver [47], [48]), la matemática china Sijue Wu demostró la existencia de soluciones locales al problema de Beale pero sin viscosidad y para perturbaciones no necesariamente pequeñas de la superficie horizontal. Wu considera un fluido irrotacional, lo cuál permite, en dos dimensiones, definir la velocidad como el gradiente de un potencial ϕ. Al ser el fluido incompresible ($div(u) = 0$) se deduce que $\Delta\phi = 0$. El hecho de que la velocidad se pueda deducir de una función armónica permite introducir toda la artillería de la variable compleja y el análisis armónico. En tres dimensiones no se pueden usar directamente la técnicas de variable compleja, pero sí el análisis de Clifford, que vendría a ser un equivalente tridimensional. El principal inconveniente de estos trabajos, aparte de la restricción que impone la irrotacionalidad del fluido, está en la imposibilidad de incorporar la tensión superficial en el marco teórico, ya que ésta es considerada nula.

- La restricción de irrotacionalidad impuesta por Wu ha sido eliminada recientemente por Christodoulou y Lindblad en una serie de trabajos que culminó en 2004 (ver [31]). La dificultad esencial en tratar la ecuación de Euler en ausencia de tensión superficial está en el carácter hiperbólico (o parabólico degenerado) no lineal del sistema que impide el uso de un esquema de demostración como el usado por Solonnikov (punto fijo de Banach) y sugiere un esquema iterativo del tipo Nash-Móser. Físicamente se puede entender la dificultad en el hecho de que no son fuerzas como las de tensión superficial o las viscosas las que evitan que la masa de fluido

se desintegre de forma instantánea, sino algo mucho más sutil como es la incomprensibilidad del mismo.

2.4 INESTABILIDAD Y SINGULARIDADES

Una vez que el problema de evolución de interfases está bien planteado y admite soluciones, al menos para tiempos cortos, es natural preguntarse por la evolución para tiempos largos. Tradicionalmente este análisis se ha hecho en torno a soluciones de equilibrio y la cuestión central que se plantea es la de su estabilidad. Uno desea determinar si pequeñas perturbaciones de dichas soluciones evolucionan de manera que el sistema vuelve a la situación de equilibrio o, por el contrario, se aleja de ella.

En este apartado describiremos algunas de las inestabilidades hidrodinámicas más importantes que involucran problemas de interfases. Estas inestabilidades llevan el nombre de los científicos que primero las describieron y dan lugar, a menudo, a la aparición de singularidades en tiempo finito cuya descripción supone uno de los temas centrales de investigación actual en mecánica de fluidos.

LA INESTABILIDAD DE RAYLEIGH

Lord Rayleigh estudió en 1879 (cf. [36]) la estabilidad de una columna de fluido no viscoso. Supuso además que el campo de velocidades del fluido es irrotacional, lo cuál es correcto bajo la suposición de que el rotacional de la velocidad inicial es nulo. Por tanto existe un campo escalar ϕ cuyo gradiente es la velocidad y como $\nabla \cdot u = 0$ entonces

$$\Delta\phi = 0 \, . \tag{17}$$

De la ecuación de Navier-Stokes para fluidos no viscosos (ecuación de Euler) se sigue

$$\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \left| \nabla \phi \right|^2 + \nabla \frac{p}{\rho} = 0$$

y de ahí la ecuación de Bernoulli:

$$\phi_t + \frac{1}{2} \left| \nabla \phi \right|^2 + \frac{p}{\rho} = Const.$$

Si la velocidad inicial en el fluido es nula, entonces la constante en la ecuación anterior es la presión inicial p_0 dividida por la densidad del fluido. Fijando nuestra atención a la interfase y aplicando la condición de contorno (11) tenemos entonces

$$\phi_t + \frac{1}{2} \left| \nabla \phi \right|^2 + \frac{\gamma}{\rho} H = \frac{\Delta P}{\rho} \tag{18}$$

donde $\Delta P = p_0 - p_{ext}$.

Finalmente, la interfase se moverá siguiendo la conocida condición cinemática (ver (13)):

$$V_N = n \cdot \nabla \phi \tag{19}$$

que en el caso de una superficie axisimétrica descrita por la función generatriz $h(z,t)$ se escribe en la forma:

$$h_t = \phi_r - \phi_z h_z \ . \tag{20}$$

Las ecuaciones (17), (18), (20) describen la evolución de la interfase $h(z,t)$ y la función potencial $\phi(r,z,t)$. Claramente, las interfases correspondientes a $\phi = 0$ son las superficies de curvatura media constante. Consideremos una superficie axisimétrica que consiste en un cilíndro ligeramente perturbado de forma periódica:

$$h\,(z,t) = R + \varepsilon A(t)\cos(kz) \ \text{ con } A(0) = 1 \tag{21}$$

realicemos un cambio de coordenadas hacia un cilindro de radio R de la forma

$$r \to \frac{h(z,t)}{R} r \ , \ z \to z \ ,$$

e introduzcamos un potencial de la forma

$$\phi(r,z,t) = \varepsilon B(t) f(r)\cos(kz) \ \text{ con } B(0) = 0 \ . \tag{22}$$

Sustituyendo (21), (22) en (17)-(20) y reteniendo los términos de primer orden en ε se obtiene:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\phi = B(t)\left(-k^2 f + f'' + \frac{1}{r}f'\right) = 0 \tag{23}$$

$$B'(t)f(r) - \frac{\gamma}{\rho}A(t)(\frac{1}{R^2} - k^2) = 0 \ \text{ en } r = R \tag{24}$$

$$A'(t) = B(t)f'(r) \ \text{ en } r = R \tag{25}$$

La única solución acotada (salvo factor multiplicativo) de (23) es

$$f(r) = I_0(kr)$$

($I_0(x)$ es la primera función modificada de Bessel) que llevada a (24), (25) conduce a

$$B'(t)I_0(kR) - \frac{\gamma}{\rho}A(t)(\frac{1}{R^2} - k^2) = 0$$

$$A'(t) = kB(t)I_1(kR)$$

donde hemos usado que la derivada de $I_0(x)$ es $I_1(x)$. Resolviendo el anterior sistema llegamos a

$$A(t) = \cosh(\omega t)\ ,\ B(t) = \frac{\omega}{kI_1(kR)}\sinh(\omega t)$$

con

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho}\frac{kI_1(kR)}{I_0(kR)}(\frac{1}{R^2} - k^2) \equiv \frac{\gamma}{\rho R^3}G(kR)\ . \tag{26}$$

Nótese que la función $G(x)$, puesto que $I_0(x)$ e $I_1(x)$ son positivas, es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$. Es decir, $A(t)$ y $B(t)$ crecerán de forma exponencial si $k < R^{-1}$. De hecho, la tasa de crecimiento será máxima para el máximo de $G(x)$ que ocurre para $x = 0.697....$ Por tanto, la longitud de onda de la perturbación del cilindro que más crece es la correspondiente al número de onda $k_{máx} = 0.697/R$; es decir, $\lambda_{máx} = 9.01R$. Vale la pena señalar que basado en este cálculo, Rayleigh estimó el tamaño teórico de las gotas generadas en la ruptura y este difería menos del 15% de los valores experimentales que Savart midió casi medio siglo antes. No obstante este éxito, la extrapolación de la teoría lineal, que es solo válida para pequeñas perturbaciones, al proceso completo de ruptura es esencialmente incorrecta.

Si repetimos el cálculo de arriba a las pequeñas perturbaciones de la superficie esférica obtenemos la siguiente relación análoga a (26):

$$\omega^2 = -\frac{\gamma}{\rho R^3}l(l-1)(l+2)\ ,\ \ l = 2, 3, 4, ...$$

(ver [35]). El término de la derecha es siempre negativo, lo que implica la no existencia de perturbaciones de crecimiento exponencial. La superficie esférica es linealmente estable.

En los cálculos expuestos se ha supuesto siempre un solo fluido no viscoso e irrotacional. Evidentemente éstas son demasiadas suposiciones para un fluido real. La extensión de la teoría de Rayleigh a sistemas de dos fluidos viscosos no es sencilla y ha sido objeto de algunos trabajos repartidos a lo largo del siglo XX. No obstante, el resultado cualitativo esencial –la inestabilidad de Rayleigh– está presente en todos los desarrollos. El valor de $\lambda_{máx}$ cambia y depende entonces, de forma más o menos complicada, de las viscosidades respectivas de los fluidos involucrados.

La cuestión que se plantea es si la inestabilidad de Rayleigh desemboca en una ruptura del tubo fluido en tiempo finito, tal y como la experiencia demuestra, o no. Es fácil mostrar que una ruptura en tiempo finito da lugar a una singularidad en tiempo finito para el campo de velocidades.

Hoy por hoy, no hay demostración de que tal cosa ocurra o, por contra, de que el sistema de Navier-Stokes no contenga soluciones con ruptura de interfases (con la consiguiente formación de gotas) en tiempo finito. El resultado más importante al respecto se debe a J. Eggers y T. Dupont (ver [32]). Estos autores mostraron numéricamente la existencia de soluciones autosimilares de ruptura en tiempo finito. Estas soluciones se comportan asintóticamente cerca del punto de ruptura z_0 y tiempo de ruptura t_0 como:

$$\begin{aligned} h(z,t) &\simeq (t_0-t)\varphi\left(\frac{z-z_0}{(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}\right), \\ u_z(r,z,t) &\simeq \frac{1}{(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}\psi\left(\frac{z-z_0}{(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}\right), \\ u_r(r,z,t) &\simeq -\frac{r}{2(t_0-t)}\psi'\left(\frac{z-z_0}{(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}\right), \end{aligned}$$

siendo $\varphi(\xi)$ y $\psi(\xi)$ dos funciones que se pueden calcular numéricamente.

Figura 8: Formación de filamentos en gotas de un fluido muy viscoso (ver [49])

Todos los resultados existentes en la literatura hacían referencia a modelos o a límites asintóticos derivados del problema original. En [17] se aborda el análisis de los filamentos que se forman durante la evolución de los chorros de un fluido muy viscoso, demostrando que dichos filamentos no pueden colapsar uniformemente en tiempo finito en la dinámica de las ecuaciones de Navier-Stokes complementada con las fuerzas de tensión superficial. Se demuestra que el volumen encerrado por un filamento satisface

$$Vol(t) \geq Ce^{-t^2}.$$

Se trata del primer resultado analítico tridimensional para el problema de singularidades con interfases. En [50] se calculan los tamaños de los filamentos que aparecen en fluidos de alta viscosidad.

La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Consideremos el movimiento bidimensional de dos fluidos inmiscibles, incompresibles y no viscosos separados por una interfase. Supongamos una periodicidad horizontal de la interfase con periodo 2π. Asumamos también que

no hay vorticidad inicialmente en el interior de los fluidos. Bajo estas condiciones, la vorticidad permanecerá concentrada en la superficie de separación de los fluidos que, es por tanto, una hoja de vorticidad. La cuestión que nos planteamos es cómo evoluciona dicha hoja. En particular, interesa conocer si la evolución da lugar a estructuras espirales caracteristicas como las que se observan por ejemplo en las llamadas "nubes onduladas". La geometría bidi-

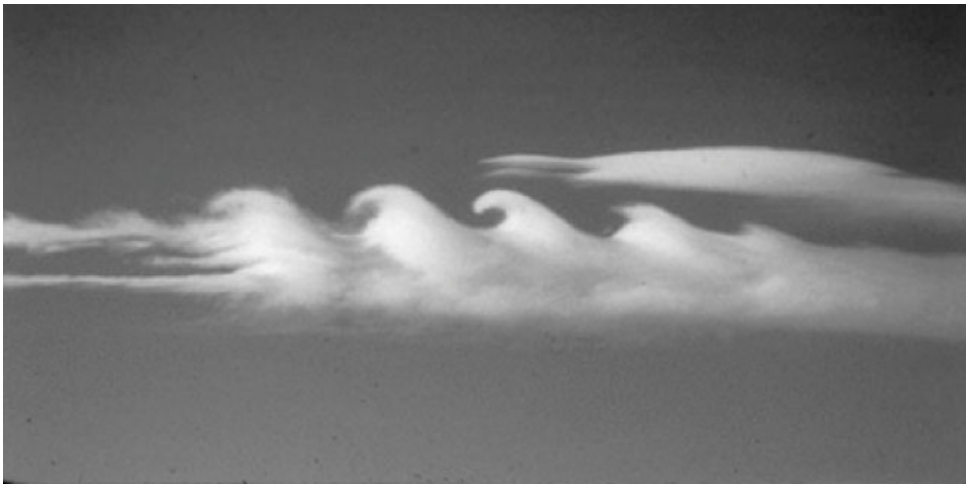


Figura 9: Ejemplo de nube ondulada. Las capas de aire por encima y por debajo de la nube se mueven tangencialmente a la misma con distintas velocidades.

mensional del problema permite considerar los puntos del plano como números complejos e introducir la posición de los puntos de la interfase en la forma

$$z(\alpha, t) = x(\alpha, t) + iy(\alpha, t)$$

siendo α un parámetro que etiqueta a las partículas fluidas de la frontera. Las velocidades de ambos fluidos en la interfase, que denotaremos por u_1 y u_2 han de tener la misma componente normal:

$$u_1 \cdot n = u_2 \cdot n$$

mientras que las componentes tangenciales de la velocidad pueden ser discontínuas. Definiremos $\widetilde{\Gamma}$ como

$$\widetilde{\Gamma} = (u_1 - u_2) \cdot n$$

es decir, el salto en las componentes tangenciales de la velocidad al cruzar la interfase. Sea

$$\Gamma = \widetilde{\Gamma} \, |z_\alpha| \, .$$

Entonces, tal como mostraron Baker, Meiron y Orszag (ver [39]):

$$z_t^*(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha',t)}{z(\alpha,t) - z(\alpha',t)} d\alpha'. \tag{27}$$

La ecuación para $\Gamma(\alpha,t)$ es de la forma

$$\Gamma_t(\alpha,t) = -\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R}\right) \tag{28}$$

siendo R el radio de curvatura de la interfase en el punto etiquetado con el parámetro α. Las ecuaciones (27), (28) constituyen un sistema de dos ecuaciones integrodiferenciales para $z(\alpha,t)$ y $\Gamma(\alpha,t)$.

Una solución obvia de (27), (28) es $z(\alpha,t) = \alpha$, $\Gamma(\alpha,t) = \Gamma_0$ que corresponde a la interfase plana. Si perturbamos ligeramente esta solución, entonces la relación de dispersión resultante es tal que los modos de longitud de onda suficientemente grande se vuelven inestables.

En 1979 D. W. Moore (ver [40]) estudió el problema (27) con $\Gamma(\alpha,t)$ constante. Si tomamos un dato inicial de la forma

$$z(\alpha,0) = \alpha + i\varepsilon sen\alpha$$

correspondiente a una perturbación periódica de la interfase plana, y buscamos la solución de (27) de la forma

$$z(\alpha,t) = \alpha + \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n(t) e^{in\alpha}$$

entonces los coeficientes $A_n(t)$ satisfacen un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales con datos iniciales $A_1(0) = \varepsilon/2$, $A_{-1}(0) = -\varepsilon/2$, $A_n(0) = 0$ $(n \neq \pm 1)$. Usando métodos asintóticos formales y cálculo numérico, Moore mostró que existe un tiempo crítico $t_c(\varepsilon) = O(-\ln\varepsilon)$ tal que

$$A_n(t_c) \underset{|n|\to\infty}{\sim} C\,|n|^{-\frac{5}{2}}$$

y que esto implica que la curvatura de la interfase se hace singular en t_c.

Hou, Lowengrub y Shelley mostraron en [41] evidencia numérica de la existencia de este tipo de singularidades en la curvatura. Más tarde, Siegel (ver [42]) encontró resultados análogos a los de Moore sobre formación de singularidades pero añadiendo los efectos de tensión superficial (ecuación (28)). Este es un resultado notable, ya que, en principio, uno tendería a pensar que la tensión superficial debiera regularizar el flujo de tal manera que las singularidad en la curvatura desapareciera.

Geométricamente, la singularidad se manifiesta para tiempos mayores que t_c en un enrollamiento de la interfase sobre sí misma en forma de espiral. A pesar de que la evidencia numérica del escenario descrito arriba es fuerte y los métodos asintóticos a partir de los cuáles se deduce la singularidad en la curvatura son bastante convincentes, el hecho es que no existe aún una demostración matemáticamente rigurosa de la aparición de tal singularidad. Un problema abierto resulta ser pues el de la existencia de singularidades para la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

2.5 ONDAS

Una clase importante de problemas trata de las ondas en la superficie de un fluido. Esta situación describiría el movimiento de olas en la superficie del océano bajo la acción de la gravedad terrestre. Este estudio fue iniciado por Stokes en 1880 y sigue siendo hoy en día fuente de interesantes resultados matemáticos. En su formulación más sencilla describimos el dominio ocupado por el fluido en el espacio como la región $-h < z < \eta(x, y, t)$. Suponiendo que el fluido es irrotacional e incompresible, el campo de velocidades es el gradiente de un potencial que satisface la ecuación (17). En $z = -h$ suponemos que se encuentra una superficie sólida (el fondo del oceano) e imponemos que no haya flujo de fluido. Es decir,

$$v_z \equiv \phi_z = 0 \ \text{ en } z = -h \ .$$

En $z = \eta(x, y, t)$ imponemos la condición (18) con ΔP la diferencia entre la presión externa y la presión hidrostática dada por $p_0 - \rho g \eta(x, y, t)$:

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta(x, y, t) + \frac{\gamma}{\rho} H = \frac{p_0}{\rho} \ \text{ en } z = \eta(x, y, t)$$

y la condición cinemática (19) que en este caso se puede expresar en la forma

$$\eta_t + (\eta_x, \eta_y, -1) \cdot \nabla \phi = 0 \ .$$

Una *onda viajera* con velocidad de propagación $c = (c_x, c_y)$ será una solución (η, ϕ) tal que $\eta(x + c_x t, y + c_y t, t) = \eta(x, y, 0)$ y $\phi(x + c_x t, y + c_y t, z, t) = \phi(x, y, z, 0)$. En el caso bidimensional (sin dependencia en la coordenada y y con $c_y = 0$) y en ausencia de tensión superficial (con $\gamma = 0$) la demostración de existencia de este tipo de ondas fue abordada primeramente por Stokes (ver [28]), quien usando métodos asintóticos y perturbativos calculó su forma en el caso de perturbaciones pequeñas de la superficie plana. Stokes también conjeturó la existencia de "ondas extremas" que desarrollan esquinas de apertura $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ en la cresta y son cóncavas en todo punto excepto en las crestas. La razón para conjeturar este tipo de estructura estriba en el hecho de que ángulos de apertura $\frac{2\pi}{3}$ satisfacen el sistema de ecuaciones descrito

arriba localmente. Pero aun no se ha podido determinar de manera rigurosa si la conjetura establecida por Stokes es cierta o no, aunque toda la evidencia numérica y resultados teóricos apuntan en esa dirección. Los resultados teóricos que establecen la existencia de ondas viajeras son particularmente elegantes y arrancan de trabajos de Levi-Cività y Nekrasov (ver [29], [27]) en los que se reduce el problema, tras una transformación hodógrafa, a la resolución de una ecuación integral. En un lenguaje más moderno las soluciones aparecen como ramas de soluciones bifurcadas de la solución plana.

Figura 10: Olas generadas en un laboratorio.

Trabajos más recientes sobre la existencia de ondas viajeras tienen en cuenta los efectos de la tensión superficial ($\gamma \neq 0$) y de la vorticidad. Citemos a este respecto trabajos de Jones y Toland (cf. [30]) y Constantin y Strauss (cf. [25]) y que también se han descrito ondas doblemente periódicas (en x e y) en el caso tridimensional gracias a una formulación Hamiltoniana del problema (ver Craig & Nicholls [26]).

Mención especial merecen otro tipo de ondas llamadas *ondas estacionarias* en dos dimensiones. En este caso tanto la superficie $z = \eta(x,t)$ como el potencial $\phi(x,z,t)$ son periódicos en espacio y tiempo. El resultado son ondas espacialmente periódicas cuya amplitud varía de forma también periódica en el tiempo. El establecimiento de la existencia de este tipo de ondas ha sido abordado en trabajos recientes de Plotnikov y Toland (ver por ejemplo [24]). Resulta un problema particularmente complicado, debido a que una estrategia basada en linealizar el problema y tratar los términos nolineales como perturbaciones da lugar a fenómenos de "denominadores pequeños", parecidos a los de la mecánica celeste, que se resuelven mediante esquemas iterativos del tipo Nash-Moser.

Finalmente, vale la pena señalar que cuando h es pequeño (aguas poco profundas) se pueden deducir modelos aproximados para la evolución de la superficie fluida. Quizás el más famoso lo constituye la ecuación de Korteweg-de Vries que pertenece a una clase de ecuaciones llamadas "dispersivas" y que presentan, como una de sus características fundamentales, soluciones en forma de ondas solitarias, llamadas "solitones" similares a los tristemente célebres *tsunamis*. Este tipo de ecuaciones representa un tema central de investigación en la física-matemática inspirado, de nuevo, por los fluidos. No pudiéndonos extender más, referimos al lector al interesante artículo de Luis Vega [43].

REFERENCIAS

[1] J. LERAY, Etude de divereses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Math Pures Appl.* **12** (1933) 1–82.

[2] J. LERAY, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.* **63** (1934) 193–248.

[3] A. SHNIRELMAN, On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation. *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997) no. 12, 1261–1286.

[4] V. SCHEFFER, An inviscid flow with compact support in space-time. *J. Geom. Anal.* **3** (1993) no. 4, 343–401.

[5] V. SCHEFFER, Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations. *Comm. Math. Phys.* **55** (1977) no. 2, 97–112.

[6] S. KLAINERMAN, PDE as a unified subject. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). *Geom. Funct. Anal.* Special Volume (2000) Part I, 279–315.

[7] J. SERRIN, On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **9** (1962) 187–195.

[8] H. KOZONO Y Y. TANIUCHI, Limiting case of the Sobolev inequality in BMO, with application to the Euler equations. *Comm. Math. Phys.* **214** (2000) no. 1, 191–200.

[9] P. CONSTANTIN, C. FEFFERMAN Y A. MAJDA, Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations. *Comm. Partial Differential Equations* **21** (1996) no. 3-4, 559–571.

[10] L. CAFFARELLI, R. KOHN Y L. NIRENBERG, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982) no. 6, 771–831.

[11] J.Y. CHEMIN, Persistence of geometric structures in two-dimensional incompressible fluids. *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* 26 (1993) 4, 517–542.

[12] A. BERTOZZI Y P. CONSTANTIN, Global regularity for vortex patches. *Comm. Math. Phys.* **152** (1993) 1, 19–28.

[13] J.L. Rodrigo, On the evolution of sharp fronts for the Quasi-geostrophic equation. *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), no. 6, 821–866.

[14] S. Schochet, Explicit solutions of the viscous model vorticty eqution. *Commun. Pure Appl. Math.* **41** (1986), 531-537.

[15] D. Córdoba y C. Fefferman, On the collapse of tubes carried by 3D incompressible flows. *Comm. Math. Phys.* **222** (2001) 293–298.

[16] D. Córdoba, M. Fontelos, A. Mancho, y J.L. Rodrigo, Evidence of singularities for a family of countor dynamics equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102** (2005), no. 17, 5949–5952.

[17] A. Córdoba, D. Córdoba, C. Fefferman y M. Fontelos, A geometrical constraint for capillary jet breakup, *Advances in Math.* **187** (2004) 1, 228–239.

[18] A. Córdoba, D. Córdoba y M. Fontelos, Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity, *Annals of Math.* **162** (2005) 3.

[19] D. Córdoba, C. Fefferman, y R. de la Llave, On squirt singularities in hydrodynamics, *SIAM J. Math. Analysis* **36** (2004), no. 1, 204–213.

[20] W. Wolibner, Un théorème d'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. *Math. Zeit.*, **37** (1933) 698–726.

[21] J.T. Beale, T. Kato, y A. Majda, Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Comm. Math. Phys.* **94** (1984) no. 1, 61–66.

[22] P. Constantin, P. Lax y A. Majda, A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation. *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985) no. 6, 715–724.

[23] Lord Rayleigh (J.W. Strutt), On the instability of jets. *Proc. Lond. Math. Soc.* **10** (1879) 4–13.

[24] P. I. Plotnikov, J. F. Toland, Nash-Moser theory for standing water waves, *Arch. Rational Mech. Anal.* **159** (2001) 1–83.

[25] A. Constantin, W. Strauss, Exact steady periodic water waves with vorticity, *Commun. Pure Appl. Math.* **57** (2004) 481–527.

[26] W. Craig, D. Nicholls, Travelling two and three dimensional capillary gravity water waves, *SIAM J. Math. Anal.* **32** (2000) 323–359.

[27] A. I. Nekrasov, *The exact theory of steady waves on the surface of a heavy fluid*, Izdat. Akad. Nauk. SSSR, 1951, Moscow.

[28] G. G. Stokes, Considerations relative to the greatest height of oscillatory irrotational waves which can be propagated without change of form, *Mathematical and physical papers, Cambridge* (1880) 225–228.

[29] T. Levi-Cività, Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie, *Math. Ann.* **93** (1925) 264–314.

[30] M. JONES, J. F. TOLAND, Symmetry and the bifurcation of capillary-gravity waves, *Arch. Rational Mech. Anal.* **96** (1985) 29–53.

[31] H. LINDBLAD, Well-posedness for the motion of an incompressible liquid with free surface boundary, *Annals of Math.* **162** (2005) 1.

[32] J. EGGERS Y T. F. DUPONT, Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equation, *J. Fluid Mech.* **262** (1994) 205.

[33] R. FINN, *Equilibrium capillary surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1986.

[34] R. FINN, Capillary surface interfaces. *Notices of the AMS*, **46** (1999) nº7, 770–782.

[35] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, *Physique Théorique*, Tome 6, *Mécanique des fluides*. Ed. Mir, 1989.

[36] LORD RAYLEIGH (J.W. STRUTT), On the instability of jets. *Proc. Lond. Math. Soc.* **10** (1879) 4–13.

[37] F. SAVART, Mémoire sur la Constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys.* **53** (1833) 337–386.

[38] R. SCARDOVELLI, S. ZALESKI, Direct numerical simulation of free surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31** (1999), 567–603.

[39] G. R. BAKER, D. I. MEIRON, S. A. ORSZAG, Vortex simulations of the Rayleigh-Taylor instability, *Phys. Fluids*, **23** (1980), 1485–1490.

[40] D. W. MOORE, The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **365** (1979), 105–119.

[41] T. HOU, J. LOWENGRUB, M. SHELLEY, Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension, J. Comput. Phys., **114** (1994), 312–338.

[42] M. SIEGEL, A study of singularity formation in the Kelvin-Helmholtz instability with surface tension. *SIAM J. Appl. Math.*, **55** (1995) 4, 865–891.

[43] L. VEGA, La ola solitaria, LA GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA, **4** (2001) nº 3, 528–566.

[44] V.A. SOLONNIKOV, Solvability of a problem on the motion of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface. *Math. USSR Izvestija*, **11** (1977) 6, 1323–1358.

[45] J.T. BEALE, The initial value problem for the Navier-Stokes equations with a free surface, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **34** (1981) 3, 359–392.

[46] J. T. BEALE, Large-time regularity of viscous surface waves, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **84** (1984) 4, 307–352.

[47] S. WU, Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D, *Invent. Math.* **130** (1997) 1, 39–72.

[48] S. WU, Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999) no. 2, 445–495.

[49] X.D. Shi, M.P. Brenner y S.R. Nagel, A cascade of structure in a drop falling from a faucet, *Science* **265** (1994) 219-–222.

[50] M.A. Fontelos, On the evolution of thin viscous jets: break-up and filament formation, *Math. Methods Appl. Sci.* **27** (2004) 10, 1197–1220.

Diego Córdoba
Departamento de Matemáticas
Instituto de Matemáticas y Física Fundamental
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
C/Serrano 123, 28040 Madrid
Correo electrónico: dcg@imaff.cfmac.csic.es

Marco Antonio Fontelos
Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas
y Ciencias de la Naturaleza
Universidad Rey Juan Carlos
Correo electrónico: marco.fontelos@uam.es

José Luis Rodrigo
Mathematics Department
Yale University
Correo electrónico: jose.rodrigo@yale.edu