

# ATMOSFERA Y OCEANO EN EQUILIBRIO RADIATIVO<sup>1</sup>

por

Joaquín Pelkowski\*

## Resumen

**Pelkowski, J.:** Atmósfera y océano en equilibrio radiativo. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **22**(82): 53-67. 1998. ISSN 0370-3908.

Se describe una extensión de un modelo clásico de la teoría de capas planetarias en equilibrio radiativo. El tratamiento se hace de acuerdo con el conocido esquema de Eddington. La extensión consiste en incorporar los efectos de la reflexión (isotrópicamente difusa) de la energía solar en la superficie que separa la atmósfera de un planeta y su capa superficial. El modelo, en cuyo diseño también se tiene en cuenta la absorción de radiación de onda corta, comprende los modelos de la misma clase hasta ahora elaborados. A título de ilustración, el modelo es aplicado a la atmósfera terrestre y al océano, para los cuales se calculan posibles perfiles de temperatura.

**Palabras claves:** Radiación planetaria, perfiles de temperatura en equilibrio radiativo

## Abstract

The article describes an extension of a classical model in the theory of radiative equilibrium of planetary layers. It is elaborated in the spirit of the Eddington approximation, by virtue of which analytical solutions become feasible. The extension consists in allowing for the (isotropically diffuse) reflection of solar radiation at the interface between a planet's atmosphere and its surface layer. Since the model also incorporates absorption of short-wave radiation, it encompasses earlier models of the same kind. As an illustration, it is applied to calculating the temperature profiles of both the Earth's atmosphere and its ocean.

**Key words:** Planetary radiation, temperature profiles in radiative equilibrium

<sup>1</sup> Trabajo realizado dentro del marco del Grupo de Investigaciones en Meteorología-U.N., con el apoyo financiero de COLCIENCIAS y el BID: Contrato COLCIENCIAS-Universidad Nacional de Colombia, 539/96.

\* Profesor Asociado - Departamento de Geociencias, Universidad Nacional de Colombia.

## Introducción

La Tierra se encuentra, climatológicamente hablando, en equilibrio energético o, como suele decirse en meteorología, en equilibrio radiativo. Esto significa que la Tierra emite en promedio exactamente la misma cantidad de energía que la que absorbe en forma de radiación electromagnética proveniente del Sol. De no ser así, la Tierra se calentaría o enfriaría gradualmente. Para los fines de la climatología, cabe considerar al Sol como un *cuerpo negro*, que se mantiene mediante reacciones termonucleares a una temperatura de unos 5780 K. En realidad, esta temperatura, denominada en astrofísica *temperatura efectiva*,  $T_g$ , no es sino una temperatura característica de la fotosfera solar; representa simplemente la temperatura que debería tener el supuesto cuerpo negro, para emitir, según la ley de Stefan-Boltzmann, exactamente la cantidad de energía que por unidad de área y tiempo irradia el Sol. Asimismo, midiendo la cantidad de energía emitida por nuestro planeta (desde un satélite, por ejemplo), podemos atribuirle una temperatura efectiva,  $T_{ef}$ , la cual resulta ser aproximadamente igual a 18°C bajo cero ( $T_{ef} = 255^\circ\text{K}$ ; cf. Trenberth, 1992). Esta temperatura puede explicarse suponiendo que la Tierra emite como un cuerpo negro de forma esférica, al mismo tiempo que absorbe un 70 % de la energía solar interceptada, rechazando el 30 % restante en virtud de su albedo o poder de reflexión. El valor promedio actual de este albedo global (o planetario, con  $A$  por símbolo) es la fracción correspondiente, que distinguiremos mediante un subíndice ( $A_0 = 0.3$ ). En términos matemáticos, podemos expresar la condición de equilibrio radiativo global terrestre (pero válida para cualquier planeta de características semejantes) como el siguiente balance energético:

$$(1) \quad \sigma T_g^4 \Gamma_0 \pi R_\oplus^2 (1 - A_0) = \sigma T_{ef}^4 4\pi R_\oplus^2$$

donde hemos empleado la emisión del *cuerpo negro* según la ley de Stefan-Boltzmann, y donde  $R_\oplus$  y  $R_g$  representan los radios de la Tierra y el Sol, respectivamente. Hemos incluido el factor de dilución  $\Gamma_0 = (R_g / D_0)^2$ , de la energía emitida por el Sol al nivel de su "superficie", el cual tiene en cuenta la circunstancia geométrica de que la densidad por unidad de área de la energía solar irradiada isotrópicamente disminuye en la proporción en que aumenta el cuadrado de la distancia media entre el planeta receptor y el Sol (así, para la

Tierra,  $D_0 \approx 150.000.000$  km). Además, hemos tenido en cuenta que la energía solar interceptada por la Tierra baña, en promedio, a todo el globo, tras haber atravesado, casi perpendicularmente, un disco imaginario (proyección bidimensional de la esfera) de radio igual al terrestre, lo que explica que en el miembro izquierdo sólo aparece el cuarto de la superficie de una esfera. Despejando la temperatura efectiva de la Tierra y empleando los valores astronómicos medios de las magnitudes que figuran en la ecuación, obtenemos  $T_{ef} = 255$  K, valor que concuerda con el observado.

Este modelo en bloque permite reproducir un dato climatológico importante, como lo es la temperatura efectiva de un planeta. Es un modelo radiativo, el más sencillo en una jerarquía de modelos climáticos gradualmente más complejos. El siguiente escalafón en la jerarquía es un modelo radiativo que permita tener en cuenta un hecho fundamental de la termodinámica del sistema solar, y es la observación de que todos los cuerpos en él exhiben un gradiente de temperatura en sus capas gaseosas. Que el modelo sea radiativo significa que deliberadamente se prescinde de considerar procesos de transferencia energética que no sean debidos a la propagación de energía electromagnética. Si además se considera que los volúmenes infinitesimos absorben la misma cantidad de energía electromagnética que la que emiten, el modelo representa estados locales en equilibrio. A tales modelos se los caracteriza como de "equilibrio radiativo".

La noción de atmósfera en equilibrio radiativo se originó en un estudio de la distribución de temperatura en la fotosfera solar (Schwarzschild, 1906). Desde entonces, no se ha dejado de utilizar en los tratados, tanto astrofísicos como meteorológicos, que se ocupan de la transferencia de energía electromagnética a través de la envoltura gaseosa de un cuerpo celeste. El primer investigador en aplicarlo a una atmósfera planetaria, y particularmente a la terrestre, fue Emden (1913).

El modelo de una atmósfera en equilibrio radiativo, después de haber sido creado a principios de este siglo, gozó de gran popularidad en astrofísica y meteorología, sobre todo en la primera mitad del mismo, tras de que Eddington propusiera una aproximación que permite la solución de la ecuación principal que rige el intercambio radiativo<sup>1</sup>. En meteorología, su divulgación tuvo mucho que ver con la búsqueda de la explicación, tras el descubrimiento de la estratosfera en 1900, de la isoterma (aparente) de sus capas inferiores. El modelo de

Eddington se ha consagrado como clásico. En meteorología, después de haberse abandonado como instrumento de investigación, parece tener lugar un renacimiento del mismo en el contexto de modelación del clima.

El modelo del equilibrio radiativo presupone coeficientes de absorción independientes de la longitud de onda, un supuesto que se conoce como emisión gris en teoría de la radiación. En el modelo de Eddington, tal como se suele aplicar en los textos de meteorología, se tiene en cuenta solamente la absorción y emisión de energía electromagnética de onda larga (o infrarroja), mientras que se puede admitir que la energía de onda corta (o visible) atraviesa inalterada la atmósfera terrestre. Esto se debe a que los espectros de la energía solar incidente y de la energía telúrica emergente corresponden a temperaturas muy distintas, de modo que los espectros mencionados, al promediarse con respecto a las distintas direcciones de propagación posibles, resultan no traslaparse, y a que la atmósfera de la Tierra deja pasar una fracción importante de la radiación solar. En una primera etapa de desarrollo del modelo, por consiguiente, es razonable suponer que el coeficiente de absorción del planeta tenga dos valores: cero en la parte del espectro visible y no nulo en el infrarrojo (modelo a veces conocido como semigris). Sin embargo, **Emden** (1913), a quien ya mencionamos como el autor del primer modelo de equilibrio radiativo en meteorología, no se limitó a omitir la absorción en el visible, sino que anticipó lo que muchas décadas después (vid. p. ej., **Goody & Yung**, 1989), se propuso, como el artificio más fácil de tener en cuenta la relativamente pequeña fracción de energía solar absorbida por la atmósfera (un 20% de la incidente), utilizar en la región espectral de ondas cortas un coeficiente de absorción que represente una fracción de la absorción en el infrarrojo. El modelo resultante ha sido aplicado a la atmósfera de Venus (**Gierasch & Goody**, 1970). Esta extensión del modelo clásico permite explicar cualitativamente el aumento de la temperatura con la altura en las partes superiores de algunas atmósferas del sistema solar, donde tiene lugar la absorción de radiación ultravioleta (solución "termosférica").

Además de estas simplificaciones físicas, adoptaremos la geometría más común en las investigaciones sobre

transferencia radiativa, esto es, la de una capa plana y paralela (o estratificada). Semejante capa se caracteriza por su uniformidad horizontal (cualquier variable dependiente sólo puede variar espacialmente en dirección perpendicular a la capa). Como modelo de una atmósfera de espesor suficientemente delgado, comparado con el radio del planeta correspondiente, ha sido de gran utilidad en el pasado.

Nosotros nos proponemos extender una vez más el modelo clásico, incorporando la reflexión de energía solar en la superficie de la Tierra, puesto que la energía reflejada representa una fracción importante (el 30 %) de la energía incidente. Esta extensión se hará naturalmente de la forma más sencilla, es decir, suponiendo reflexión isotrópica de los rayos incidentes. Señalo de antemano que no se tiene en cuenta en estos modelos el *esparcimiento* (o *difusión* o *dispersión*) de la radiación visible, el cual no solo es responsable de los colores que vemos durante el día, especialmente del azul celeste, sino de las dificultades formidables que surgen en su tratamiento matemático. Las ecuaciones que obtendremos en el caso más general, aunque más complejas, no sacrifican el límpido esquema original del modelo, al mismo tiempo que acrecientan su flexibilidad. El modelo extendido contiene en todo caso los modelos anteriores, que se obtienen anulando el albedo de la superficie y el coeficiente de absorción en el visible.

### Breve repaso de la teoría de transferencia radiativa

Empezamos por definir fenomenológicamente el campo de radiación, tal y como se ha de especificar en la descripción de su interacción con las capas materiales a considerar (atmósferas, hidrosferas o litosferas).

En cada punto del medio (plano y paralelo) podemos "anclar" una esfera de radio unidad (simbolizada como  $S^2$ ), cuyos puntos en la superficie, de coordenadas  $(\theta, \varphi)$ , fijan cada uno una dirección alrededor del centro de la esfera (dirección representada por un vector unitario  $\vec{\omega}$ ), de modo que se tiene un número infinito de direcciones. A cada una de ellas se le puede asignar una infinitud de magnitudes que llamaremos el espectro de *intensidades* o *radiancias* del campo de radiación. Es decir, para cada dirección hay una infinitud de radiaciones de distintas longitudes de onda (existe por lo general toda una gama de colores). Las intensidades pueden variar en el espacio y en el tiempo. Con todo, definimos la función de siete variables,  $I_\lambda(x, y, z, \theta, \varphi, t)$ , que depende de: la longitud de onda (índice  $\lambda$ ), de la posición  $(x, y, z)$  en el espacio, de la dirección  $(\theta, \varphi)$ , y del tiempo  $t$ . A

<sup>1</sup> No cito ninguna obra de Eddington al respecto, pues no conozco ninguna. La apelación modelo o aproximación de Eddington, como también las hipótesis que se conocen bajo su nombre, es común en las obras pertinentes sobre astrofísica o radiación atmosférica.

este campo se le llama *intensidad* o *radiancia monocromática*.

La suposición de una atmósfera plana y paralela implica que no hay variación de intensidad en el plano horizontal ( $\partial I_\lambda / \partial x = \partial I_\lambda / \partial y \equiv 0$ ). Esta hipótesis simplificadora a su vez acarrea la uniformidad acimutal de la intensidad (es decir,  $\partial I_\lambda / \partial \phi \equiv 0$ ). A estas simplificaciones viene a juntarse la invariabilidad temporal, o estacionariedad de todos los campos que consideraremos en este estudio. De modo que en una atmósfera estratificada, la intensidad monocromática se reduce a una función de tres variables:

$$I_\lambda(z, \theta)$$

Esta intensidad sufre alteraciones, por extinción y reforzamiento, al atravesar la atmósfera. Estos cambios se describen mediante una ecuación diferencial conocida como ecuación de transferencia radiativa (o ecuación de Schwarzschild):

$$(2) \quad \frac{dI_\lambda}{dr} = -\rho k_\lambda I_\lambda + \eta_\lambda$$

El primer término del miembro derecho representa el debilitamiento, por absorción, de la intensidad que se propaga a lo largo de un "rayo de luz" (ley de Lambert-Bouguer). El rayo de luz puede describirse mediante el parámetro de arco  $r$ , a partir de un punto de referencia ( $r = 0$ ). Al mismo tiempo, la energía de un rayo monocromático puede intensificarse debido a la emisión de energía dentro del medio material. Como no incluiremos el esparcimiento, la "función fuente"  $\eta_\lambda$  se debe exclusivamente a la emisión. Si el medio estuviese en equilibrio termodinámico (uniformidad térmica total), la intensidad tiene una distribución espectral tan conocida como universal  $\frac{1}{4}$  la función de Planck:

$$(3) \quad B_\lambda(T) = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc_0/\lambda kT} - 1}$$

donde  $h$  es la constante de Planck,  $k$  la de Boltzmann, y  $c_0$  indica la velocidad de la luz en el vacío. La radiación descrita por esta fórmula no está polarizada. No es necesario incluir la polarización en la clase de modelo que estamos confeccionando.

En la situación del equilibrio termodinámico, la intensidad es uniforme y, por consiguiente, la ecuación

(2) se reduce a la relación  $\rho k_\lambda I_\lambda = \eta_\lambda$ , o, con la ec. (3), a la ley de Kirchhoff:

$$\eta_\lambda = \rho k_\lambda B_\lambda(T)$$

En meteorología se suele emplear como función fuente a esta expresión, aun cuando la atmósfera en conjunto jamás se encuentra en equilibrio térmico. Para justificarla, se postula que *localmente* se dan las condiciones del equilibrio térmico. Aceptamos el argumento, sin mayor reparo, pues la hipótesis es utilizada universalmente en meteorología e ingeniería (en astrofísica también, pero hoy en día con más escrúpulos). Así obtenemos como ecuación de transferencia radiativa (ETR) la que el lector puede encontrar en cualquier texto o monografía pertinentes (véase, p.ej., **Mihalas**, 1978; **Battaner**, 1986; **Goody & Yung**, 1989; **Modest**, 1993):

$$(4) \quad \frac{dI_\lambda}{dr} = \rho k_\lambda (B_\lambda - I_\lambda)$$

Esta es la ecuación básica de la teoría de transferencia radiativa, siempre que sea lícito descartar el esparcimiento de los rayos electromagnéticos, es decir, cuando éstos no sufren desviaciones de sus trayectos de propagación, causadas por moléculas (esparcimiento de Rayleigh) o por partículas en suspensión (esparcimiento de Mie). Más adelante operaremos con intensidades integradas con respecto a las longitudes de onda (intensidades que propongo calificar de *holocromáticas*, por oposición a *monocromáticas*), así que no está de más recordar que:

$$\int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

Esta intensidad holocromática, multiplicada por  $\pi$ , no es otra cosa que el flujo de radiación emitido por (la superficie) de un cuerpo negro a la temperatura  $T$  (ley de Stefan-Boltzmann).

Antes de seguir adelante, nos detendremos un momento en el sentido del operador diferencial  $d() / dr$ : para los campos estacionarios del modelo, el operador, en coordenadas cartesianas, tiene la siguiente forma (véase, p.ej., **Goody & Yung**, 1989):

$$\frac{dI_\lambda}{dr} = \vec{\omega} \cdot \nabla I_\lambda$$

Si recordamos que nuestro modelo no admite dependencia horizontal de campos, el operador en cuestión se reduce a:

$$(5) \quad \frac{dI_\lambda}{dr} = \mu \frac{\partial I_\lambda}{\partial z}$$

donde  $\mu = \cos\theta$  es el coseno del ángulo cenital, o componente vertical del vector unitario  $\vec{\omega}$ . Como la ecuación de transferencia radiativa no contiene derivadas respecto al ángulo cenital, ni respecto a la longitud de onda, la derivada respecto a  $z$  bien puede escribirse como una derivada ordinaria.

Hemos sustituido la variable independiente  $\theta$  por su coseno,  $\mu$ . Un segundo cambio de variable llevará a fórmulas mucho más cómodas. En lugar de medir la posición vertical de un elemento de volumen (atmosférico) indicando su *altura geométrica*  $z$ , es conveniente introducir la *profundidad óptica*  $\tau$ , que se define como la integral

$$\tau(z) = \int_z^{H_t} \rho k d\zeta$$

Esta nueva variable *independiente* tiene en cuenta tanto la cantidad de materia absorbente, por unidad de área ( $\int \rho d\zeta$ ), como la capacidad o eficiencia de absorción (a través del coeficiente de absorción  $k$ ).  $H_t$  representa la altura de la frontera superior de la capa en cuestión, y  $\tau(0) \equiv \tau_b$  es su profundidad óptica.

La profundidad óptica depende generalmente de la frecuencia, debido a que la absorción es selectiva (según el color). Por ejemplo, para radiaciones de longitud de onda en la gama del ultravioleta ( $\lambda \leq 0.3$  aproximadamente), la atmósfera es, ópticamente hablando, infinitamente profunda (u opaca), mientras que, para las radiaciones que el ojo humano puede percibir es, incluso si se tuviera en cuenta el esparcimiento, casi transparente (ópticamente panda o somera). En la naturaleza las profundidades ópticas suelen ser funciones espectrales bastante irregulares, lo cual presenta un gran obstáculo a un tratamiento analítico. Por eso, se ha ideado el modelo de la *atmósfera gris*, consistente en suponer que el coeficiente de absorción no depende de la frecuencia de la radiación (incidente o emitida). Así, en lugar de la infinitud de valores de la profundidad óptica, se opera con solo un valor (medio en algún sentido), constante a lo largo de todo el espectro (absorción gris), o, algo más general, con dos valores representativos de

las características distintas de la absorción en el visible y en el infrarrojo (absorción a veces denominada semigris). Esta última hipótesis se ajusta mejor al caso de la atmósfera, y en todo caso contiene el anterior. **Emden** (1913) fue el primero en introducirla, y Milne planteó el problema de la atmósfera gris en un contexto astrofísico (**Battaner**, 1986). Hoy se considera ser una aproximación demasiado cruda; no obstante, permite aclarar algunos puntos teóricos que bien pueden ser refinados posteriormente. Por lo demás, en estudios con modelos climáticos, la complejidad de las interacciones a menudo no permite ir más allá del modelo que estamos definiendo.

Designaremos la profundidad óptica en la región espectral de las ondas relativamente largas (el régimen infrarrojo) con la letra  $\tau$ . En el régimen visible utilizaremos el símbolo  $\tau_g$ . Para evitar tener que considerar dos variables independientes,  $\tau$  y  $\tau_g$ , nos serviremos, en un empeño por buscar siempre el planteamiento más sencillo, del expediente de suponer que ambas profundidades son proporcionales (**Emden**, 1913; **Goody & Yung**, 1989):

$$\tau_g = \varepsilon \tau$$

Cuando  $\varepsilon = 1$ , tendremos el caso de la absorción gris. Si  $\varepsilon = 0$ , tenemos el caso de la atmósfera semigris, muy popular en meteorología, por cuanto permite ilustrar en forma drástica el efecto invernadero.

Con las nuevas variables independientes, podemos reescribir la ecuación (4) como una ecuación en el "espacio óptico":

$$(7) \quad \mu \frac{dI_\lambda}{d\tau} = I_\lambda(\tau, \mu) - B_\lambda(\tau)$$

En esta ecuación la función fuente depende de la profundidad óptica, a través de la temperatura que aparece en la función de Planck, cuya distribución espacial se puede representar en términos de  $\tau$ :

$$B_\lambda(\tau) = B_\lambda \circ T(\tau)$$

Continuando la descripción matemática del campo radiativo, pasamos a definir el flujo monocromático de energía radiante, por unidad de área y tiempo, como la integral:

$$\vec{F}_\lambda(z) = \int_{S^2} I_\lambda(\tau, \theta) \vec{\omega} d\omega$$

Teniendo en cuenta que, salvo en el caso de la energía solar incidente, en un modelo con estratificación vertical las componentes horizontales del flujo de energía se anulan, la única componente que se ha de considerar es la vertical, que se obtiene de la última integral, mediante la proyección del vector flujo  $\vec{F}$  sobre el vector vertical unitario  $\vec{k}$  (perpendicular al plano de estratificación y apuntando hacia el cenit). Si además integramos respecto al ángulo acimutal  $\varphi$  y a la longitud de onda  $\lambda$ , obtenemos el flujo vertical holocromático neto. En meteorología y astrofísica es más conveniente introducir el valor negativo de dicho flujo:

$$(8) \quad F \equiv -\vec{F} \cdot \vec{k} = -2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^1 I_\lambda(\tau, \mu) \mu d\mu d\lambda$$

El flujo radiativo también es una función de  $\tau$ . Como la capa plana y paralela es atravesada por flujos en una dirección con dos sentidos, es idóneo distinguir además flujos correspondientes: por un lado, el flujo ascendente (compuesto de rayos con ángulos cenitales menores que un recto)

$$(9) \quad F^\uparrow(\tau) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^1 I_\lambda(\tau, \mu) \mu d\mu d\lambda$$

y el flujo descendente (al cual contribuyen las intensidades con un ángulo cenital mayor que  $90^\circ$ , es decir, para las cuales  $\mu < 0$ ), que definimos así:

$$(10) \quad F^\downarrow(\tau) = -2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^0 I_\lambda(\tau, \mu) \mu d\mu d\lambda$$

De modo que podemos escribir  $F = F^\downarrow - F^\uparrow$

Tras establecer los flujos que acabamos de reseñar, nos atendremos además a la división tradicional según la composición espectral predominante: flujos asociados con energía de onda corta, centrada alrededor de 0,5 mm, que designaremos por  $Q(\tau)$ , y flujos infrarrojos que resultan de integrar el espectro de ondas relativamente largas (alrededor de 10 mm),  $R(\tau)$ , con lo que podemos escribir para el flujo holocromático total

$$(11) \quad F(\tau) = Q(\tau) + R(\tau) = Q^\downarrow(\tau) - Q^\uparrow(\tau) + R^\downarrow(\tau) - R^\uparrow(\tau)$$

Esta ecuación permite calcular el balance de la radiación total en el nivel de la profundidad  $\tau$ , o sea, a la altura  $z$ .  $Q(\tau)$  se refiere a la radiación solar, y  $R(\tau)$  a la infrarroja. Nos ocuparemos primero de la radiación solar.

## Debilitamiento de la radiación solar

El objetivo principal de este apartado es calcular el flujo de radiación solar. Como ésta está constituida en su mayor parte de radiación de onda corta (en meteorología esto significa: de onda menor que unos 4 mm), por ser radiación proveniente de un cuerpo de alta temperatura (alrededor de  $6000^\circ\text{C}$ ), al atravesar la atmósfera, su intensidad va a ser extinguida paulatinamente, sin ser reforzada al mismo tiempo, ya que las temperaturas atmosféricas son demasiadas bajas como para contribuir en forma apreciable al espectro de ondas cortas (sólo contribuyen al espectro de ondas largas, mayores que 4 mm). Esto implica que en la ecuación de transferencia de energía radiativa solar no figura la función fuente (siempre que se excluya, como en todo nuestro tratamiento, el esparcimiento). Así:

$$(12) \quad \mu \frac{dI_\lambda^8}{dz} = -\rho k_\lambda I_\lambda^8$$

donde  $I_\lambda^8$  es la intensidad monocromática de la radiación solar, igual a  $B_\lambda(T_8)$ , en el tope de la atmósfera. Antes de integrar esta sencilla ecuación, examinemos el ángulo sólido que envuelve los rayos solares.

Supondremos inicialmente que el Sol se encuentra en el cenit, es decir, en la dirección  $\vec{k}$ , perpendicular a los planos paralelos de la capa que nos interesa. El Sol, considerado como cuerpo negro, emite radiación de intensidad conocida: a cada rayo solar va asociado un espectro *normal* (o de Planck, vid. ec. (3)), correspondiente a la temperatura de  $5780^\circ\text{K}$ . El haz de rayos solares está confinado en un ángulo sólido finito, cuyo vértice puede suponerse ubicado en el tope de la capa ( $z = H_t$ ), y cuyo eje (en dirección del vector unitario *antisolar*  $\vec{\omega}_0 = -\vec{k}$ ) une al observador con su cenit. La semiapertura del ángulo sólido subtendido por el Sol, que tiene forma de cono circular, se notará como  $\theta_s$ . Los rayos que inciden bajo un ángulo cenital mayor que  $\pi - \theta_s$ , no pudiendo haberse originado en la fotosfera solar, tienen una intensidad despreciable (correspondiente, si descontamos la contribución ínfima de otros cuerpos celestes, a los  $2.7^\circ\text{K}$  de la radiación de fondo).

El ángulo sólido subtendido por el Sol se puede calcular pensando en la constelación que acabamos de describir:

$$\Omega_8 = \int d\omega = \int_0^{2\pi} \int_1^{\mu_*} d\mu d\varphi = 2\pi(1 - \mu_*) = 2\pi \frac{\Gamma_0}{1 + \mu_*} \approx \pi \Gamma_0$$

donde  $\mu_* = \cos\theta_*$ . Hemos aprovechado además la relación geométrica entre el ángulo de la semiapertura y el factor de dilución  $\Gamma_0$ , esto es,  $\sin^2\theta_* = \Gamma_0$ , y el hecho de que  $\mu_* = 0.999989 \approx 1$ .

Si integramos la intensidad de los rayos solares con respecto a las direcciones comprendidas en este ángulo sólido y a lo largo del espectro de frecuencias, obtenemos, con una aproximación excelentísima, lo que se conoce como la *constante solar*  $Q_0$ :

$$\int_0^\infty \int_{\Omega_0} B_\nu(T_8) d\omega d\nu = \frac{\sigma T_8^4}{\pi} \Omega_8 \approx \sigma T_8^4 \Gamma_0 \equiv Q_0$$

Si integramos los vectores unitarios asociados a cada rayo solar, ponderados con sus respectivas intensidades holocromáticas, obtenemos por definición el flujo de energía radiante en la dirección antisolar  $\vec{\omega}_0 = -\vec{k}$ . Como las direcciones se arraciman alrededor de la dirección del eje del ángulo sólido  $\Omega_8$ , podemos reemplazarlas a todas por  $\vec{\omega}_0$ , lo cual permite fácilmente la integración:

$$\int_0^\infty \int_{\Omega_0} B_\nu(T_8) \vec{\omega}_0 d\omega d\nu \approx Q_0 \vec{\omega}_0$$

Es patente que esta expresión es válida para cualquier inclinación del Sol. Si llamamos  $\mu_8$  al coseno del ángulo cenital  $\theta_8$  del Sol, podemos calcular el valor de frontera del flujo descendente como la proyección de este vector sobre el vector unitario  $-\vec{k}$ :

$$(13) \quad -Q_0 \vec{\omega}_0 \cdot \vec{k} = Q^\downarrow(\tau=0) = Q_0 \mu_8$$

Si integramos la ecuación diferencial (12), empleando el valor de frontera  $I_\lambda^8(H, -\mu_8) = B_\nu(T_8)$ , y sustituyendo a  $\mu$  por  $\mu_8$ , puesto que las diferencias son despreciables, obtenemos la radiancia solar en función de la profundidad óptica:

$$I_\lambda(\tau, \mu_8) = B_\lambda(T_8) e^{-\varepsilon\tau/\mu_8}$$

es decir, un debilitamiento exponencial (en el espacio óptico).

Es fácil reproducir el razonamiento anterior, pero ahora para cualquier nivel en la capa absorbente, para inferir que:

$$(14) \quad Q^\downarrow(\tau) = \mu_8 Q_0 e^{-\varepsilon\tau/\mu_8}$$

Los rayos solares inciden sobre la faz de la Tierra, después de atravesar la atmósfera, debilitados por la absorción en ella, bajo ángulos cenitales vecinos a  $\pi - \theta_8$ , para ser parcialmente reflejados (de manera difusa), y parcialmente transmitidos hacia el interior (del mar o la tierra), fracción que acaba siendo absorbida en esta "capa superficial del planeta". La fracción reflejada vuelve a atravesar la atmósfera, pero ahora rellenando el ángulo sólido igual a un hemisferio ( $2\pi$ ). Además, el suponer que la reflexión difusa sea isótropa, nos permite establecer una expresión de la radiancia reflejada en la superficie terrestre:

$$I_\lambda^8(\tau_b, \mu > 0) = \mu_8 r_0 \Gamma_0 B_\lambda(T_8) e^{-\varepsilon\tau_b/\mu_8}$$

Resolviendo nuevamente la ecuación (12), pero ahora con esta condición de frontera, vemos que la radiancia sufre nuevamente un debilitamiento exponencial. Así obtenemos para el flujo ascendente de radiación solar:

$$(15) \quad Q^\uparrow(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\lambda^8(\tau_b, \mu) e^{-\varepsilon(\tau_b-\tau)/\mu} \mu d\mu d\varphi = 2r_0 Q^\downarrow(\tau_b) E_3(\varepsilon(\tau_b - \tau))$$

donde

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-x\xi}}{\xi^n} d\xi$$

define la integral exponencial de orden  $n$ . El flujo neto de radiación solar hacia la capa atmosférica situada por debajo de la altura correspondiente a la profundidad  $\tau$  es, simplemente, igual a la diferencia de los flujos descendente y ascendente:

$$(16) \quad Q(\tau) = Q^\downarrow(\tau) - Q^\uparrow(\tau) = Q^\downarrow(0) [e^{-\varepsilon\tau/\mu_8} - 2r_0 e^{-\varepsilon\tau_b/\mu_8} E_3(\varepsilon(\tau_b - \tau))]$$

Para la atmósfera, e incluso para todo el planeta, este flujo resulta ser:

$$Q(0) = \mu_8 Q_0 (1 - A)$$

donde se ha definido el albedo planetario o global como:

$$(17) \quad A \equiv 2r_0 e^{-\varepsilon\tau_b/\mu_8} E_3(\varepsilon\tau_b)$$

Según esta definición, el albedo global es una función del albedo superficial y de la profundidad óptica en el

visible. Si adoptamos el valor particular  $\mu_0 = 0.25$  ( $\theta_0 = 75.5^\circ$ ), y  $A = A_0 = 0.3$ , deducimos que  $Q(0) = \frac{Q_0(1-A_0)}{4} = \sigma T_0^4$ , donde la última igualdad obedece a la definición en la ec. (1).

Habiendo considerado el flujo de radiación solar, que es un flujo asociado sobre todo con radiación de onda corta, tenemos que ocuparnos de la radiación de onda larga, radiación que corresponde a las temperaturas del planeta y que se califica de infrarroja. Por lo general, las atmósferas planetarias absorben esta radiación con mayor eficacia que la radiación solar, de modo que pueden considerarse en el infrarrojo como ópticamente opacas.

### Transferencia radiativa en el infrarrojo

En el infrarrojo no sólo tiene lugar un debilitamiento de la intensidad de los rayos, sino al mismo tiempo un reforzamiento debido a la emisión de la materia absorbente, la cual, si se considera una porción suficientemente pequeña, se supone estar a la temperatura local del medio (hipótesis conocida como *equilibrio termodinámico local*). En tal caso la ecuación de transferencia radiativa deja de ser homogénea. Buscamos resolver esta ecuación, mucho más compleja que en el caso anterior de la radiación solar, porque ahora el término adicional es una función de la temperatura, y ésta no puede calcularse si no se conoce la intensidad de la radiación (visible e infrarroja), que a su vez depende de ella. El problema es matemáticamente de tal complejidad que no se ha resuelto exactamente (véase **Rutly & Bergeat**, 1994, quienes ofrecen una reciente solución analítica para una familia de ecuaciones parecidas, pero aparentemente excluyendo nuestro caso). Es preciso, pues, simplificar. Lo haremos utilizando un esquema de aproximación clásico, planteado por Eddington (vid. **Chamberlain & Hunten**, 1987; **Goody & Yung**, 1989). En el modelo de Eddington se asume *isotropía hemisférica*: las intensidades de los rayos ascendentes, como la de los descendentes, son consideradas independientes de la dirección en los hemisferios correspondientes. Esto facilita las integraciones respecto a los ángulos.

Llamemos a las intensidades con ángulos cenitales menores que  $\pi/2$  (de cosenos positivos)  $I^+$  y a aquellas con cosenos negativos  $I^-$ . Para que pueda haber flujos radiativos no nulos, es preciso que  $I^+ \neq I^-$ . El flujo neto infrarrojo se define como la integral (8), pero en lugar de  $F$ , se ha de escribir  $R$ . Recordemos que  $R(\tau) = R^\downarrow(\tau) - R^\uparrow(\tau)$ .

La integración, pues, de la ecuación (7) con respecto a  $\mu$  y  $\lambda$ , conduce a una ecuación para el flujo infrarrojo:

$$(18) \quad \frac{dR}{d\tau} = -4\pi(\mathfrak{J} - B)$$

$$\text{donde} \quad B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

representa la función de Planck integrada en longitud de onda e

$$\mathfrak{J}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu d\nu$$

define la intensidad (local) media, la cual viene a ser, en vista de la isotropía hemisférica, simplemente:

$$(19) \quad \mathfrak{J} = \frac{1}{2}(I^+ + I^-)$$

Igualmente obtenemos de las ecs. (9) y (10) los flujos ascendente y descendente:

$$(20) \quad R^\uparrow(\tau) = \pi I^+(\tau)$$

$$(21) \quad R^\downarrow(\tau) = \pi I^-(\tau)$$

### Equilibrio radiativo de una capa plana y paralela

Pasemos a considerar la condición determinante del modelo. El equilibrio radiativo se define como aquella condición (estacionaria) en la que un volumen infinitesimal de la capa ni pierde ni acumula energía (radiante). Recordemos que en los modelos radiativos no se tienen en cuenta flujos de energía que no sean electromagnéticos. Luego la condición significa que la divergencia del flujo radiativo se anula en todas partes. En el caso unidimensional que nos ocupa, la condición se expresa (en función de  $\tau$ ) sencillamente así:

$$(22) \quad \frac{dF}{d\tau} = \frac{dF^\downarrow}{d\tau} - \frac{dF^\uparrow}{d\tau} \equiv 0$$

donde  $F(\tau) = Q(\tau) + R(\tau)$  (ver ec. (11)) representa el flujo total (de energía radiante). El equilibrio radiativo implica, pues, la constancia de este flujo total en función de la profundidad óptica:

$$(23) \quad F(\tau) = F(0) = Q(0) + R(0) = \mu_0 Q_0(1-A) + R^\downarrow(0) - R^\uparrow(0)$$

Podemos definir una temperatura efectiva mediante la ecuación:

$$\sigma T_{ef}^4 = R^\uparrow(0)$$

temperatura que habría de tener un cuerpo negro para emitir la misma cantidad de energía (infrarroja) que la observada a la profundidad óptica nula.

De la ecuación (18), con intervención de las ecs. (19), (20), (21) y (23), deducimos que para  $\tau = 0$ :

$$B(0) = \frac{1}{4\pi} \frac{dR}{d\tau}(0) + \frac{1}{2} (I^* + I)(0) = \frac{1}{4\pi} \frac{dR}{d\tau}(0) + \frac{R^\uparrow(0)}{\pi} + \frac{1}{2\pi} [Q(0) - F(0)]$$

Teniendo en cuenta la expresión explícita del flujo de radiación solar, ec. (16), y aprovechando la condición de equilibrio radiativo, ecuación (22), podemos expresar la derivada del flujo infrarrojo con respecto a  $\tau$  como:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\frac{dQ}{d\tau} = -\varepsilon Q^\downarrow(0) \left[ \frac{e^{-\varepsilon\tau/\mu_0}}{\mu_0} - 2r_0 e^{-\varepsilon\tau_b/\mu_0} E_2(\varepsilon(\tau_b - \tau)) \right]$$

lo cual nos permite expresar el valor de frontera en cuestión como

(24)

$$B(0) = \frac{Q^\downarrow(0)}{2\pi} \left\{ 1 - A + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{1}{\mu_0} + 2r_0 e^{-\varepsilon\tau_b/\mu_0} E_2(\varepsilon\tau_b) \right] \right\} + \frac{R^\uparrow(0)}{\pi} - \frac{F(0)}{2\pi}$$

La solución de nuestro problema se obtiene por un lado a partir de la ec. (18), derivándola con respecto a  $\tau$ :

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = 4\pi \left( \frac{dB}{d\tau} - \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau} \right)$$

y por otro integrando la ec.(7), después de multiplicarla por  $\mu$ , con respecto al ángulo sólido, siendo el resultado:

$$\frac{4}{3} \pi \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau} = -R$$

Combinando ambas ecuaciones, podemos establecer una ecuación diferencial con miembro derecho conocido:

$$(25) \quad \frac{dB}{d\tau} = \frac{1}{4\pi} \frac{d^2 R}{d\tau^2} - \frac{3}{4\pi} R$$

Ahora no hace falta sino integrar esta ecuación con respecto a  $\tau$ , recordando que  $R(\tau) = F(0) - Q(\tau)$  y recurriendo a la ecuación (16), obteniéndose así la función fuente:

(26)

$$B(\tau) = B(0) - \frac{3F(0)}{4\pi} \tau + \frac{Q^\downarrow(0)}{4\pi} \left\{ \frac{\mu_0}{\varepsilon} \left( 3 - \frac{\varepsilon^2}{\mu_0^2} \right) (1 - e^{-\varepsilon\tau/\mu_0}) + 2r_0 e^{-\varepsilon\tau_b/\mu_0} \left[ \varepsilon [E_2(\varepsilon(\tau_b - \tau)) - E_2(\varepsilon\tau_b)] - \frac{3}{\varepsilon} [E_4(\varepsilon(\tau_b - \tau)) - E_4(\varepsilon\tau_b)] \right] \right\}$$

expresión general del modelo que nos permitirá establecer las formas analíticas de los perfiles de temperatura tanto atmosférico como oceánico.

### Temperatura superficial

La temperatura superficial es, en el fondo, la temperatura efectiva de la capa superficial (mar o tierra). Si se desea suponer que ésta es térmicamente uniforme, la temperatura correspondiente no puede ser otra que la temperatura superficial  $T_s$ .

Esta temperatura no es una variable en un modelo del equilibrio radiativo, sino está determinada por las condiciones impuestas al modelo (p. ej., equilibrio radiativo global). Para calcularla, partimos de las ecuaciones (20) y (21), a las que sumamos y restamos  $\pi I^- / 2$  y  $\pi I^+ / 2$ , respectivamente, para reconocer que se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \pi I^+(\tau) &= \pi \mathfrak{S}(\tau) - \frac{R(\tau)}{2} \\ \pi I^-(\tau) &= \pi \mathfrak{S}(\tau) + \frac{R(\tau)}{2} \end{aligned}$$

de donde, en virtud de las ecs. (18), (24), y de la condición  $R(\tau) = F(0) - Q(\tau)$ , se siguen las expresiones:

$$(27) \quad R^\dagger(\tau) = \pi B(0) - \frac{R(0)}{4} - \frac{3}{4} F(0)\tau + \frac{3}{4} \int_0^\tau Q(t) dt - \frac{F(0)}{2} + \frac{Q(\tau)}{2}$$

$$(28) \quad R^\dagger(\tau) = \pi B(0) - \frac{R(0)}{4} - \frac{3}{4} F(0)\tau + \frac{3}{4} \int_0^\tau Q(t) dt + \frac{F(0)}{2} - \frac{Q(\tau)}{2}$$

Definiendo la temperatura superficial  $T_s$  mediante la relación  $R^\dagger(\tau_b) = \sigma T_s^4$  podemos derivar una ecuación para la temperatura efectiva de la superficie del planeta, aprovechando las ecuaciones (16) y (24):

(29)

$$T_s = \left( \frac{\mu_2 Q_0}{2\sigma} \right)^{1/4} \left\{ 1 - A + (1 - r_0) e^{-\varepsilon \tau_b / \mu_2} + \frac{3\mu_2}{2\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon \tau_b / \mu_2}) - r_0 e^{-\varepsilon \tau_b / \mu_2} \left[ 2\varepsilon(1 - E_2(\varepsilon \tau_b)) + \frac{1}{\varepsilon} (1 - 3E_4(\varepsilon \tau_b)) \right] + R^\dagger(0) - F(0) \left( 1 + \frac{3}{4} \tau_b \right) \right\}^{1/4}$$

Nosotros nos limitaremos, como se explicará en la siguiente sección, a considerar perfiles para los cuales  $R^\dagger(0) = F(0) = 0$ . Entonces  $T_s$  representa la temperatura a la que ha de mantenerse la capa superficial de un planeta para garantizar el equilibrio radiativo global.

Si  $\varepsilon = 0$  (o mejor, para  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), obtenemos de (29) la expresión

$$T_s = \left( \frac{\mu_2 Q_0 (1 - r_0)}{\sigma} \right)^{1/4} \left( 1 + \frac{3}{4} \tau_b \right)^{1/4} = T_{ef} \left( 1 + \frac{3}{4} \tau_b \right)^{1/4}$$

expresión clásica (cf. Chamberlain & Hunten, 1987; Goody & Yung, 1989) que refleja el efecto de invernadero: si aumenta la profundidad óptica de la atmósfera (en virtud del aumento de la masa total de ciertos gases traza), la temperatura superficial aumenta (en los modelos radiativos el aumento es mucho más pronunciado que en la realidad).

### Atmósfera en equilibrio radiativo

Consideramos de ahora en adelante solamente el caso de un planeta en equilibrio radiativo global (balance energético total está equilibrado). Como la atmósfera no recibe radiación de onda larga apreciable en su frontera superior, es decir,  $R^\dagger(0) = 0$ , la condición se traduce a lo siguiente (cf. ec.(1)):

$$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(0) = \sigma T_{ef}^4$$

Con estas condiciones de frontera, y teniendo en cuenta la hipótesis del equilibrio termodinámico local, es decir, la relación  $B(\tau) = \sigma T^4 / \pi$ , de la ecuación (24) y de la típica relación  $\tau(z) = \tau_b e^{-z/H_s}$ , válida para el vapor de agua en la atmósfera (y útil en el caso de gases que conforman el efecto invernadero), deducimos la expresión analítica de la distribución vertical de temperatura atmosférica en función de la altura sobre el nivel del mar:

$$T(z) = \left( \frac{\mu_2 Q_0}{2\sigma} \right)^{1/4} \left\{ 1 - A + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{1}{\mu_2} + 2r_0 e^{-\varepsilon \tau_b / \mu_2} E_2(\varepsilon \tau_b) \right] + \frac{\mu_2}{2\varepsilon} \left( 1 - e^{-\varepsilon \tau_b (e^{-z/H_s}) / \mu_2} \right) \left( 3 - \frac{\varepsilon^2}{\mu_8^2} \right) + r_0 e^{-\varepsilon \tau_b / \mu_2} \left[ \varepsilon \left[ E_2(\varepsilon \tau_b (1 - e^{-z/H_s})) - E_2(\varepsilon \tau_b) \right] - \frac{3}{\varepsilon} \left[ E_4(\varepsilon \tau_b (1 - e^{-z/H_s})) - E_4(\varepsilon \tau_b) \right] \right] \right\}^{1/4} \quad (30)$$

La Fig.1 muestra este perfil de temperatura, con valores de los parámetros que se citarán y explicarán en la última sección.

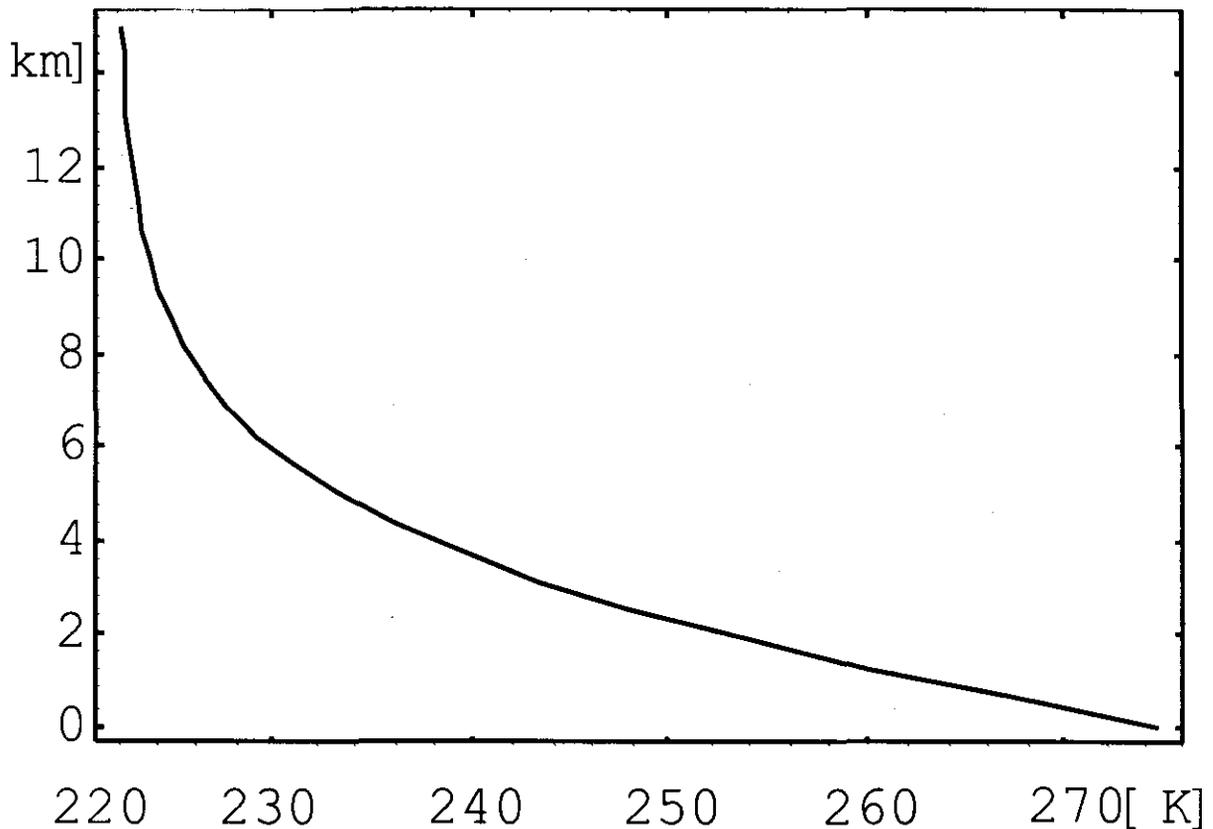


Figura 1. Distribución vertical de temperatura en la atmósfera terrestre en equilibrio radiativo, calculada para valores climático-lógicos de ciertos parámetros. (Escala de altura:  $H_g = 25$  km.)

Si el albedo superficial fuese nulo, como en los modelos hasta hoy publicados, se tendría

$$T(z) = \left( \frac{\mu_1 Q_0}{2\sigma} \right)^{1/4} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\varepsilon} \left( 1 - e^{-\varepsilon \tau_b (e^{-z/H_g})/\mu_1} \right) \left( 3 - \frac{\varepsilon^2}{\mu_1^2} \right) \right\}$$

ecuación que aparece en Goody & Yung (1989), capítulo noveno. En el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , esta última ecuación se reduce a

$$T(z) = T_{ef} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau_b e^{-z/H_g} \right)^{1/4}$$

expresión clásica que, en términos de  $\tau$ , aparece en muchos libros de texto relacionados con nuestro tema.

### Océano en equilibrio radiativo

Para nuestros fines es suficiente recordar, con más brevedad que fidelidad, algunas características radiativas del mar. Citaremos un pasaje del libro de Cifuentes et al. (1986). "Las radiaciones solares que llegan a la superficie del mar penetran en su masa, alcanzando generalmente una profundidad media de cien metros, pero que puede extenderse hasta los mil metros. La penetración de estas radiaciones depende principalmente de la turbiedad, es decir, de la cantidad de materia sólida que se encuentre en suspensión. Conforme la profundidad aumenta van penetrando menos radiaciones, por lo que la temperatura disminuye. Por lo anterior, en la superficie del mar existe una capa de agua relativamente caliente, con una temperatura uniforme; esa capa puede extenderse de los 20 a los 200 m de profundidad, dependiendo de las condiciones locales. Abajo de ella existe una zona limítrofe en donde se presenta un rápido descenso de la temperatura, llamada *termoclina*, que divide a estas aguas

superficiales, menos densas y menos salinas, de las aguas de las profundidades, más frías, densas y salinas." Las temperaturas marinas pueden oscilar espacialmente entre  $-2^{\circ}\text{C}$  hasta  $32^{\circ}\text{C}$ . En el libro mencionado se afirma que el principal aporte calorífico al mar se debe a las radiaciones energéticas que llegan del Sol. Enumeran otras fuentes menos importantes, pero no parecen interesarse por la radiación infrarroja que proviene de la atmósfera, que también es absorbida casi completamente por el océano. Podemos intentar reproducir el perfil descrito en la cita aplicando nuestro modelo a una capa marítima en equilibrio radiativo.

Cabe, pues, destacar que el caso del océano se distingue del atmosférico en dos puntos esenciales (continuamos despreciando el esparcimiento): 1) el océano, si es suficientemente profundo, absorbe toda la radiación solar que no ha sido rechazada por reflexión difusa en su superficie superior, y 2) el océano es irradiado por la atmósfera, de modo que aparece una contribución infrarroja (que constituye el efecto invernadero), ausente en el caso atmosférico. O sea, si la capa en equilibrio radiativo es el océano, los valores de frontera han de tener en cuenta la presencia de la atmósfera. Por otro lado, el océano absorbe por igual la radiación tanto de onda corta como de onda larga. En tal caso, la capa puede considerarse como un absorbedor gris. La profundidad óptica puede tomarse como infinita, ya que los rayos que penetran en el mar son absorbidos enteramente allí. Para no confundir fórmulas, emplearemos en esta sección la letra  $\delta$  en lugar de  $\tau$ . Así, tenemos que  $\delta_b = \infty$ ; también suponemos que en el fondo del océano  $r_0 = 0$ .

El balance radiativo al nivel del mar tiene la misma forma que la ec. (23):

$$F_m(0) = Q_m(0) + R_m(0) = Q_m^{\downarrow}(0) - Q_m^{\uparrow}(0) + R_m^{\downarrow}(0) - R_m^{\uparrow}(0)$$

donde el subíndice "m" indica valores que se refieren a la capa marítima, y donde ahora  $R_m^{\downarrow}(0) = R^{\downarrow}(\tau_b)$ . Hay que tener cierto cuidado con los flujos solares, porque la reflexión de radiación solar se supone tener lugar en la superficie (matemática) del mar, y no dentro del mismo. Podríamos obviar el problema introduciendo una interfase (o fase intermedia), pero no es preciso ir tan lejos. Lo importante es que el balance de la radiación solar en el nivel del mar sea en cualquier caso el mismo, ya que es la energía que de hecho absorbe el mar.

Si nos acercamos desde el interior de la atmósfera al nivel del mar (operación insinuada escribiendo como argumento  $0+$ ), tenemos:

$$Q_m^{\downarrow}(0+) = Q^{\downarrow}(\tau_b)$$

y

$$Q_m^{\uparrow}(0+) = r_0 Q^{\downarrow}(\tau_b)$$

Pero si nos acercamos a dicho nivel desde el mar (valores negativos de  $z$ , signo menos en el argumento), tenemos:

$$Q_m^{\downarrow}(0-) = Q^{\downarrow}(\tau_b)(1 - r_0)$$

$$Q_m^{\uparrow}(0-) = 0.$$

En ambos casos

$$Q_m(0) = Q_m^{\downarrow}(0) - Q_m^{\uparrow}(0) = Q_m(0+) = Q_m(0-) = Q^{\downarrow}(\tau_b)(1 - r_0)$$

También está claro que conocemos el flujo infrarrojo emergente del océano, puesto que por definición

$$R_m^{\uparrow}(0) = \sigma T_s^4,$$

siendo  $T_s$  la temperatura efectiva del mar, calculable de acuerdo con la ec. (29).

De la ec. (28), con el auxilio de las ecs. (16) y (24), las operaciones indicadas conducen a la siguiente expresión de la energía que contribuye al efecto de invernadero:

$$R^{\downarrow}(\tau_b) = \frac{Q^{\downarrow}(0)}{2} \left\{ 1 - A - (1 - r_0) e^{-\epsilon \tau_b / \mu} + \frac{344}{2\epsilon} (1 - e^{-\epsilon \tau_b / \mu}) - \frac{r_0}{\epsilon} e^{-\epsilon \tau_b / \mu} [1 - 3E_3(\epsilon \tau_b)] \right\}$$

Con los flujos fronterizos exhibidos en este apartado y las ecs. (24) y (26), deducimos la expresión para la distribución vertical de la temperatura marítima:

$$(31) \quad T_m(\delta) = \left[ \frac{\mu_2 Q_0}{2\sigma} \right]^{1/4} \left\{ 1 - A + (1 - r_0) e^{-\varepsilon \tau_b / \mu_2} \left[ \frac{\varepsilon_m}{2\mu_2} + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_m} \left( 3 - \frac{\varepsilon_m^2}{\mu_2^2} \right) (1 - e^{-\varepsilon_m \delta / \mu_2}) \right] + \frac{3}{2} \frac{\mu_2}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon \tau_b / \mu_2}) - \frac{r_0}{\varepsilon} e^{-\varepsilon \tau_b / \mu_2} [1 - 3E_4(\varepsilon \tau_b)] \right\}^{1/4}$$

Para poder representar esta expresión en función de la profundidad geométrica en el océano, se necesita una relación entre la profundidad óptica y la profundidad geométrica. No disponiendo de una relación conocida como en el caso atmosférico, donde hemos empleado la relación válida para el vapor de agua, optamos por una forma genérica arbitraria, cuyos parámetros podemos ajustar. Este paso en el modelo plantea un problema importante, con vínculos empíricos. Pero no deseamos dedicarle espacio a esta cuestión en este artículo, dejándola para otra ocasión. Sin embargo, a fin de demostrar las posibilidades que ofrece el modelo, supondremos que:

$$(32) \quad \delta(d) = \alpha d^n (e^{\beta d} - 1)$$

donde  $d$  es la profundidad geométrica. El caso particular  $n = 0$  se puede justificar, integrando la ecuación (6), con la densidad constante (agua incompresible) y con un coeficiente de absorción exponencial. Seleccionando (hipotéticamente) los valores  $n = 3$ ,  $\alpha = 100 \text{ km}^{-3}$  y  $\beta = 0.005 \text{ km}^{-1}$  podemos calcular una distribución de temperaturas marítimas con rasgos que corresponden plenamente a los perfiles observados en latitudes bajas y medias (ver Fig.2).

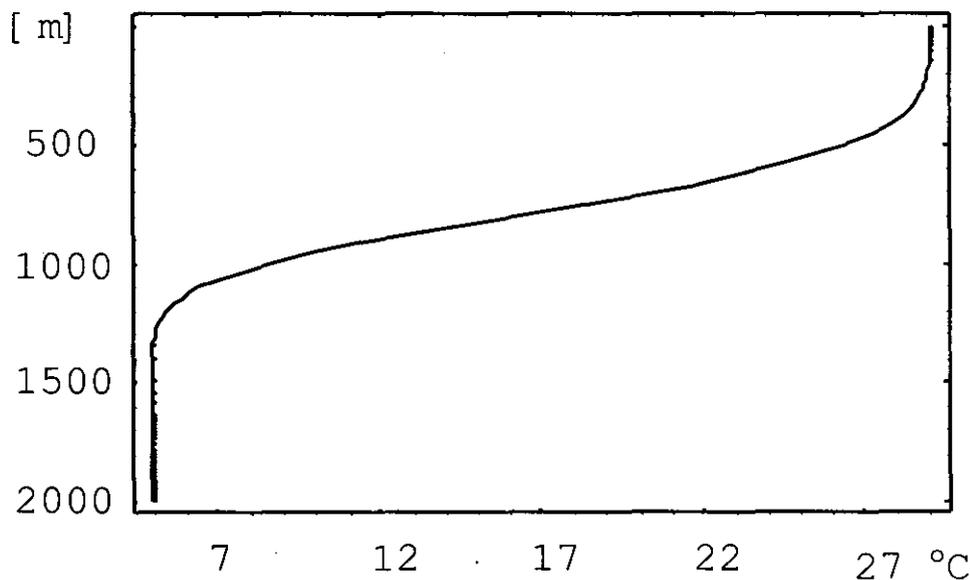


Figura 2. Distribución vertical de temperaturas marítimas, calculadas para un océano (climatológico) en equilibrio radiativo (para la representación gráfica se ha recurrido a la relación (32) con  $n = 3$ ).

### Ejemplo numérico

Consideraremos un estado climatológico, correspondiente al equilibrio radiativo global actualmente observado (el cual reproduce la temperatura efectiva del planeta,  $T_{ef} = 255$  K). Dicho estado se calcula con los siguientes valores:

$$Q_0 = 1370 \text{ W/m}^2; \mu_2 = 0.25; A_0 = 0.3$$

Para el cálculo de las distribuciones de temperatura es necesario prescribir la opacidad infrarroja de la atmósfera. Empero, no existe un valor climatológico de ese parámetro. Un criterio que nos permite fijarlo es hacer corresponder la temperatura efectiva del océano a la temperatura superficial observada, cuyo valor climatológico es de  $15^\circ\text{C}$ , o sea  $T_s = 288^\circ\text{K}$ . Con los valores de los distintos parámetros que citaremos a continuación, el modelo reproduce esta temperatura para un valor de la opacidad infrarroja un poco superior a la unidad, a saber:  $\tau_b = 1.23$ .

Con el fin de fijar otros parámetros, recurriremos a los datos del clima terrestre: aproximadamente un 20% de la radiación solar es absorbida por la atmósfera. Por lo tanto, la superficie terrestre absorbe aproximadamente la mitad de la radiación solar incidente en la frontera superior de la atmósfera. Llamemos  $\gamma_0$  a esta fracción. Estas ligaduras estadísticas nos fijan el valor climatológico de  $\varepsilon$  y  $r_0$ , como demostramos a continuación.

La energía solar que absorbe la superficie es igual a  $Q(\tau_b)$ . Por lo tanto,

$$\gamma_0 = \frac{Q(\tau_b)}{Q^\downarrow(0)} = (1 - r_0)e^{-\varepsilon\tau_b/\mu_2}$$

Por otro lado está la definición del albedo global, ec. (17), cuyo valor climatológico  $A_0$  es igual a 0.3; de ambas ecuaciones deducimos que

$$\left[ e^{-\varepsilon\tau_b/\mu_2} - \gamma_0 \right] 2E_3(\varepsilon\tau_b) = A_0 = 0.3$$

Estas ecuaciones nos fijan los valores de  $\varepsilon$  y  $r_0$  (para la profundidad óptica infrarroja estipulada y en función de  $\gamma_0$  y  $A_0$ ). (Claro está que podríamos fijar el valor de

dos variables cualesquiera de las cuatro, y calcular las dos restantes).

Con  $\gamma_0 = 0.5$  y  $A_0 = 0.3$  obtenemos  $\varepsilon = \frac{0.04717}{\tau_b}$  y  $r_0 = 0.396$ . Este valor del albedo superficial significa que para que la Tierra pueda mantener el valor climatológico del albedo global, con una atmósfera en equilibrio radiativo que absorbe el 20% de la energía solar, se precisa un albedo superficial mayor que el valor del albedo global. Todos estos valores han sido utilizados en las representaciones gráficas de las secciones precedentes.

El lector atento habrá notado, escudriñando las gráficas, que en el nivel del mar las distintas temperaturas límites no coinciden, sino que saltan de un valor a otro:

$$T(0) < T_s = 288 \text{ K} < T_m(0)$$

Es éste un rasgo esencial de todo modelo de capas en equilibrio radiativo (véase p. ej. Chamberlain & Hunten, 1987; o, para una demostración rigurosa, Pelkowski, 1993).

### Conclusión

El modelo desarrollado en este ensayo se concibe como un complemento de los modelos clásicos destinados a describir o ilustrar distintos aspectos de la teoría de la radiación, y de los cuerpos a los que se aplica. La extensión contemplada aquí permite ilustrar de una manera casi clara y elemental, lo que los poderosos y complejos modelos oceano-atmosféricos no pueden ofrecernos: una oportunidad de comprender cualitativamente la física de los procesos radiativos de retroalimentación. Los modelos clásicos nos han brindado una exquisita ilustración del efecto invernadero y una contundente explicación del oscurecimiento hacia el borde del disco solar, como también la posibilidad de describir el efecto de un calentamiento de las capas superiores de la atmósfera, debido a la presencia de oxígeno y ozono. El modelo extendido que aquí ofrecemos, al incorporar los efectos de variaciones del albedo superficial y global, pone de manifiesto los cambios de temperatura, tanto en la atmósfera como en el océano, demostrando, por ejemplo, la interrelación de tres de los factores climáticos más importantes: gases invernadero, aerosoles (que absorben energía solar), y los albedos superficial y global.

El modelo, repito, constituye una ampliación de los modelos clásicos, cuyo valor didáctico ha sido inestimable. No pretende ser realista en un sentido cuantitativo. Pero como instrumento de modelización puede ser una guía útil. Como tal, tiene sobradas posibilidades de refinamiento, especialmente en cuanto a las relaciones entre profundidad óptica y altura en la atmósfera, o entre profundidades óptica y geométrica del mar. Otra posibilidad inmediata, y de interés particular, sería la inclusión de una capa de nubes con su propio albedo. Esto lo dejaremos para un trabajo futuro, en el cual se tendrá en cuenta, también de la manera más simple, el esparcimiento de la radiación solar dentro de dicha capa de nubes, permitiendo así la investigación de efectos climatológicos adicionales, como lo es la nubosidad variable.

### Bibliografía

- Battaner, E.**, 1986: Fluidos Cósmicos. Editorial Labor, Barcelona.
- Chamberlain, J.W. y D.M. Hunten**, 1987: Theory of Planetary Atmospheres. An Introduction to their Physics and Chemistry. Segunda edición, Academic Press, Orlando.
- Cifuentes, J.L., P. Torres-García y M. Frías**, 1986: El océano y sus recursos. Vol. III. Fondo de Cultura Económica, México.
- Emden, R.**, 1913: Ueber Strahlungsgleichgewicht und atmosphaerische Strahlung. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys. Klasse, 55.
- Gierasch, P. y R.M. Goody**, 1970: Models of the Venus Clouds. J. Atmos. Sci. 27, 224.
- Goody, R.M. y Y.L. Yung**, 1989: Atmospheric Radiation. Theoretical Basis. Segunda edición, Oxford University Press, New York.
- Houghton, J.T.**, 1986: The Physics of Atmospheres. Segunda edición. Cambridge University Press, Cambridge.
- Mihalas, D.**, 1978: Stellar Atmospheres. Segunda edición, W.H. Freeman & Company, San Francisco.
- Modest, M.F.**, 1993: Radiative Heat Transfer, McGraw-Hill, Nueva York.
- Pelkowski, J.**, 1993: Approximating the source function of an atmosphere in radiative equilibrium: A variational method. Beitr. Phys. Atmosph., 66, 259.
- Rutly, B. y J. Bergeat**, 1994: The solution of the Schwarzschild-Milne integral equation in an homogeneous isotropically scattering plane-parallel medium. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 51, 823.
- Schwarzschild, K.**, 1906: Ueber das Gleichgewicht der Sonne. Goettinger Nachrichten, 41-53.
- Sobolev, V.**, 1990: Cours d'astrophysique théorique. Éditions Mir, Moscú.
- Trenberth, K.E.**, 1992: Climate System Modeling. Cambridge University Press, Cambridge.