RAM Revista del Aficionado a la Meteorología
Nº 22 - Junio - Julio - Agosto de 2004

PENSANDO BAJO LA LLUVIA

EMPIEZA A LLOVER... ¿CORRO O ANDO?

Pablo José Ruiz
jomarui@mi.madritel.es
Óscar Claramonte Chiva
oscarcl72@hotmail.com

Introducción

Ha salido de casa todo confiado en las previsiones meteorológicas. Hace un sol radiante, y sólo nubes inocentes pasean por el cielo. ¿Para qué ir cargado con un paraguas?. Sin embargo, la atmósfera guarda muchas sorpresas, y de repente, ese cielo radiante se torna oscuro y amenazador. Comienza a llover. Está en la calle, sin paraguas, en medio de un chaparrón. No hay zonas próximas seguras donde guarecerse. ¿Qué hacer?. ¿Correr todo lo posible hasta encontrar cobijo? ¿O pasear bajo la lluvia tranquilamente como versa la famosa canción de Gene Kelly? . Vamos a tratar de analizar, haciendo algunos números, esta situación para comprobar qué podemos hacer en tal caso.

Modelo matemático

En primer lugar, vamos a tratar de modelar lo más simplemente posible esta situación, de forma que sea fácilmente entendible. En nuestro modelo vamos a definir:

- Un sujeto: Es la persona que se va a mojar. Básicamente, y a tales efectos, podemos considerar que esta persona es en realidad un prisma rectangular cuya altura es la de la persona.

Así mismo, vamos a definir dos superficies, S_1 y S_2 (ver figura 1). S_1 y S_2 representarían la superficie efectiva o equivalente del sujeto vista de frente y desde arriba, respectivamente. El sujeto se va a mover en la dirección horizontal, indicada por la flecha con una velocidad V_d

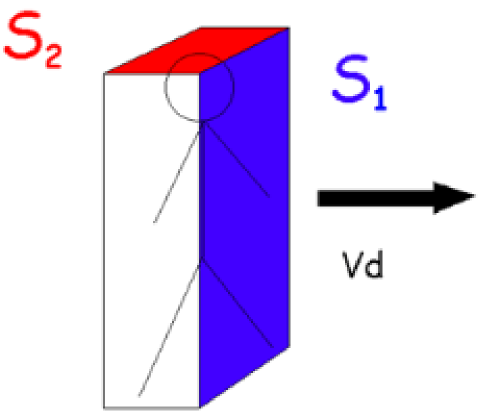

Figura 1

Representación del sujeto y las superficies vertical, S_1, y horizontal, S_2, equivalentes

- La lluvia: La vamos a modelizar como una distribución homogénea en el espacio de pequeñas esferas de agua que caen con una velocidad V_c que tiene dos componentes: una horizontal V_{cx} y otra vertical, V_{cy}. La tercera dimensión, por simplicidad la vamos a obviar, ya que los resultados que se obtienen son los mismos, y la complejidad del modelo aumenta innecesariamente.

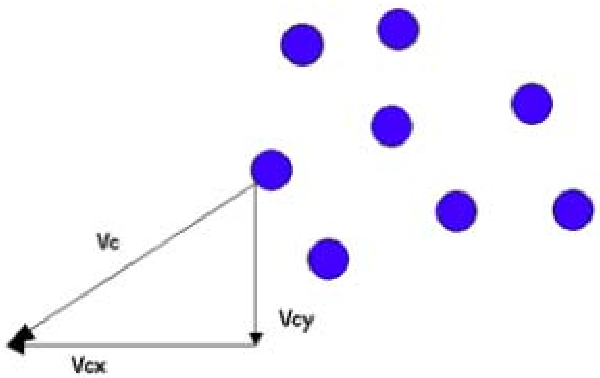

Figura 2

Representación de las gotas de lluvia y su velocidad de caída en componentes horizontal y vertical

Así mismo, y como hemos dicho que la lluvia es una distribución homogénea de gotitas en el espacio, vamos a definir una magnitud escalar: f, que va a ser el número de gotitas que hay encerradas en un metro cúbico de aire. Sus unidades son pues número de gotas/m3. La lluvia caerá siempre con la misma intensidad durante todo el recorrido del sujeto.

Análisis del problema

Una vez definido nuestro modelo matemático, procedemos a analizarlo para obtener los resultados buscados.

Plano S_2 (superficie superior)

Si la distancia que separa al sujeto del destino es L, al recorrer en línea recta dicha distancia empleará un tiempo $t=L/V_d$. Durante todo ese tiempo, la superficie S_2 está expuesta a la lluvia. A cada segundo, sobre S_2 cae un número de gotas Ng que se determina de manera muy fácil mediante la expresión:

$NgS_2\ (1\ segundo)=f*S_2*V_{cy}$

que nos está diciendo que, a cada segundo, todo un volumen de gotas de base S_2 y altura V_{cy} está precipitándose sobre S_2. Así pues, el número de gotas totales que caen sobre S_2 en el trayecto será

$t*NgS_2(1\ segundo) = t*f*S_2*V_{cy}$

Plano S_1 (superficie frontal)

Analizamos ahora el plano S_1. El razonamiento es análogo al anterior, pero ahora tenemos que en un segundo, el volumen de agua que intercepta la superficie S_1 es $NgS_1(1\ segundo)=f*S_1*|Vd-Vcx|$. Ahora usamos el concepto de velocidad relativa entre el sujeto y las gotas de agua. Usamos las componentes horizontales de la velocidad. En el caso ilustrado, y tomando como positivas las velocidades que apuntan hacia la derecha, V_d entraría con signo positivo en la fórmula, y V_{cx} con signo negativo, así en el caso ilustrado, se suma la contribución de ambas velocidades, mientras que si ambas fueran en el mismo sentido, se restaría. Además hay que tener en cuenta otra cosa. Si V_{cx} es mayor en módulo que V_d, cuando van en el mismo sentido, el sujeto se moja por la espalda, es decir, en la primera figura, las gotas estarían cayendo sobre la superficie opuesta a S1. Esta circunstancia la podemos tener fácilmente en cuenta si hacemos el valor absoluto de la resta de velocidades, de forma que este caso es equivalente a otro en el que se moja S_1, y la resta de velocidades V_d-V_x es del mismo valor y positiva. Así pues, en un tiempo t, el número de gotas totales que interceptan S_1 es $t*NgS1(1segundo) = t*f*S1*|Vd-Vcx|$.

Ya para finalizar, vamos a sumar las contribuciones de S_1 y S_2. El número de gotas totales *Ngt* que interceptan al individuo serán:

$$Ngt = t\phi S_1 \left|V_d - V_{cx}\right| + t\phi S_2 V_{cy}$$

Reescribiendo obtenemos:

$$Ngt = \phi \frac{L}{V_d}\left[S_1\left|V_d - V_{cx}\right| + S_2 V_{cy}\right] \qquad \textbf{(1)}$$

Para un manejo más sencillo a la hora de representación de esta función, podemos simplificarla considerando un valor nulo para la velocidad horizontal V_{cx} de la lluvia, y haciendo $P=\phi L S_2 V_{cy}$, $Q=\phi L S_1$ ya que los consideraremos como términos constantes. La función queda como:

$$Ngt = \frac{P}{V_d} + Q \qquad \textbf{(2)}$$

dónde se puede observar que existe un término constante Q independiente de la velocidad horizontal del sujeto V_d. Aunque su velocidad fuera infinita para hacer nulo el término P/V_d, (que representa las gotas recogidas por la superficie superior S_2), no se libraría de recoger esa cantidad *Q* de gotas por S_1, que será el mínimo de la función. Es decir, **con la velocidad sólo podemos influir en la cantidad de agua recogida por la superficie superior S_2.**

A continuación representaremos gráficamente el comportamiento de la función anterior respecto a la velocidad, V_d del sujeto que es la que interesa conocer:

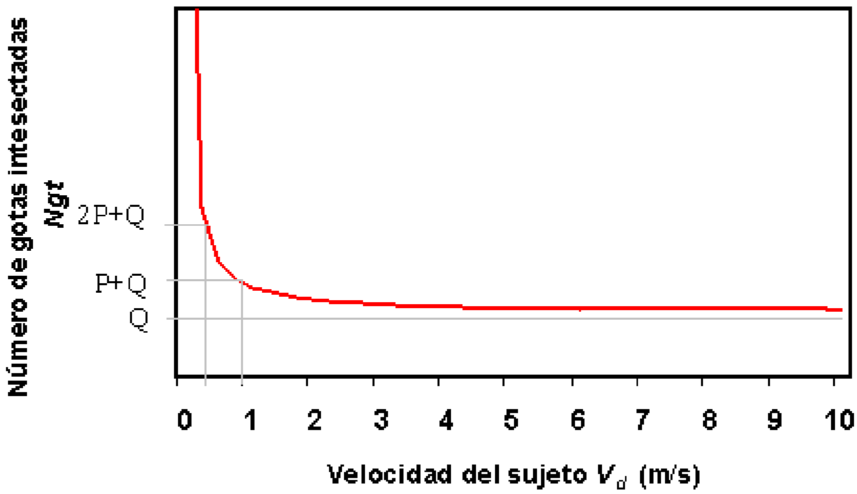

Figura 3

Representación gráfica de la ecuación (2) que da el número de gotas intersectadas *Ngt* por el sujeto, en función de su velocidad de desplazamiento V_d

Conclusión general

Observando este gráfico, ya estamos en condiciones de responder a la pregunta planteada al inicio de este trabajo.

La forma de la curva nos indica que a velocidades muy lentas el sujeto se mojará mucho. Sin embargo, aumentando un poco la velocidad, vemos que la cantidad de gotas recogidas disminuye muy rápidamente, hasta cierto punto. A partir de ese punto, aun aumentando mucho la velocidad, la cantidad de gotas recogidas no disminuye apreciablemente.

Por lo tanto, podemos concluir, que **sí merece la pena correr un poco, pero no demasiado, pues seguiríamos mojándonos casi lo mismo si corremos a mucha velocidad**. La diferencia entre el agua interceptada corriendo mucho respecto a una velocidad *normal*, es muy pequeña, y quizá este esfuerzo suplementario no compensara. Y volver a resaltar, que existe una cantidad mínima $Q=\phi LS_1$ de gotas, las interceptadas por la superficie frontal, que es inevitable recoger ya que no depende de la velocidad.

Análisis de casos concretos

Seguidamente, y tras esta conclusión general, pasaremos a analizar unos casos concretos para varias intensidades de precipitación. Así podremos dar valores numéricos a lo comentado en la conclusión general de arriba. Pero antes, resolveremos dos cuestiones:

1.- Con el fin de que en la función nos aparezca la variable *intensidad de precipitación* I, necesitamos trabajar con una nueva densidad ρ para la lluvia, con unidades de *litros/m³* en lugar de la densidad f en *Nºgotas/m³* que además nos dará el agua interceptada en litros. Consideraremos un viento débil, de forma que podamos despreciar la velocidad horizontal V_{cx} de las gotas de agua. Sabiendo que el volumen V_g de una gota es,

$$V_g = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Si en esta fórmula, consideramos el radio R en decímetros, estamos obteniendo el volumen V_g en decímetros cúbicos, o lo que es lo mismo, en litros. Multiplicando este valor por f obtenemos ρ: los litros que hay en un m^3

$$\rho = \phi \frac{4}{3}\pi R^3$$

Así mismo, hay que tener en cuenta que la intensidad I en mm/m^2s se obtiene como $I = \rho V_c$ y que el volumen de una gota es el cociente entre los litros y el número de gotas totales Ngt contenidos en un determinado volumen.

$$V_g = \frac{litros}{Ngt}.$$

Sabiendo ya los valores de ρ, I , y considerando $V_{cx}=0$ podemos reescribir la ecuación (1) de esta otra manera

$$f(V_d) = L\left(\frac{IS_2}{V_d} + \rho S_1\right) \qquad \textbf{(3)}$$

donde f tiene unidades de *litros*, la intensidad I de mm/m^2s (en lo que sigue, obviaremos que la intensidad es por unidad de área y simplemente la daremos en *mm/s* o *mm/h*), las superficies S_1 y S_2 de m^2, el espacio a recorrer L de *m*, la velocidad del móvil V_d de *m/s* y la densidad ρ de *litros/m³.*

2.- Una vez conseguido esto, necesitamos conocer el valor de la densidad de lluvia correspondiente a cada intensidad. Esto lo solucionaremos aplicando la distribución de tamaños de Marshall-Palmer para las gotas de lluvia. Apuntar, que con la distribución de tamaños, se puede calcular también la velocidad media de caída de la lluvia para una intensidad dada. De momento nos limitaremos a aplicar directamente el valor de la densidad correspondiente a cada intensidad de precipitación para realizar los cálculos. Al final del trabajo, expondremos más ampliamente esta cuestión en el apartado sobre la *velocidad óptima.*

Resueltas estas dos cuestiones, ya estamos en condiciones de realizar los cálculos y representar gráficamente el comportamiento de la función (3). Tomaremos unos valores que se aproximen lo mejor posible al caso en el que el móvil sea una persona. Para ello tomaremos los siguientes valores: superficie frontal $S_1=0.10m^2$, superficie superior $S_2=0.70m^2$, y la distancia a recorrer $L=100$ *m.*

Estos términos quedarán como constantes. Además, la velocidad máxima de desplazamiento será *20 km/h*. Dejaremos como variables la intensidad de precipitación junto con la densidad asociada a ella.

Analizaremos cinco casos de intensidades **5,10,15,50 y 100 mm/h**. Tras realizar los cálculos necesarios, representamos algunos de los valores obtenidos en la siguiente tabla, junto con la cantidad mínima $Q=L\ \rho\ S_1$ comentada anteriormente.

Tabla 1

Litros de agua *f*, intersectados por el sujeto en función de la intensidad de lluvia y de la velocidad de desplazamiento del sujeto

	5 mm/h	10 mm/h	15 mm/h	50 mm/h	100 mm/h
1 km/h	0,0741	0,1431	0,2106	0,6665	1,2980
5 "	0,0341	0,0631	0,0906	0,2665	0,4980
10 "	0,0291	0,0531	0,0756	0,2165	0,3980
15 "	0,0274	0,0497	0,0706	0,1998	0,3647
20 "	0,0266	0,0481	0,0681	0,1915	0,3480
$V_d \rightarrow$ *Infinito* (Cantidad mínima)	0,0241	0,0431	0,0606	0,1665	0,2980

y su representación gráfica,

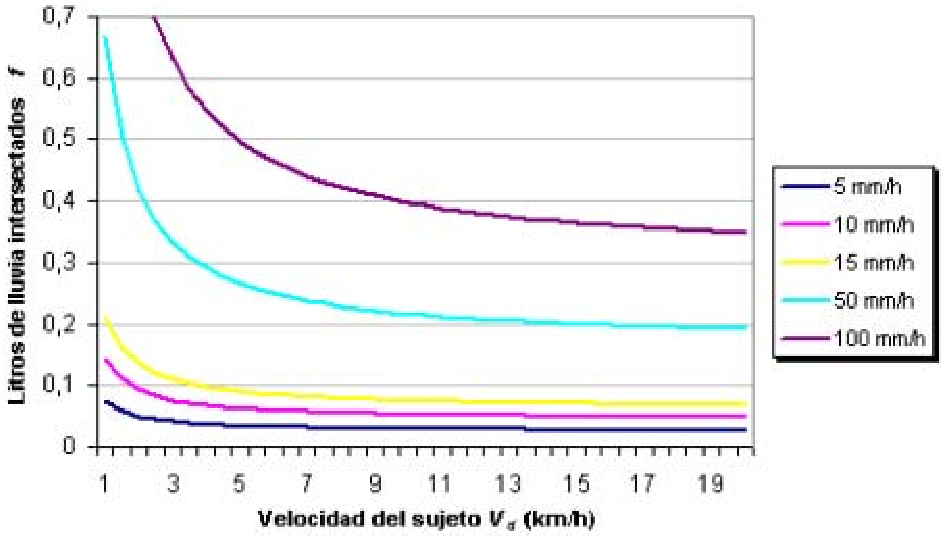

Figura 4

Representación gráfica de la ecuación (3) que da la cantidad de agua *f* (litros) interceptada por un sujeto en función de su velocidad de desplazamiento V_d, para los valores: $S_1=0.10m^2$, $S_2=0.70m^2$, $L=100m$, indicados anteriormente.

Como era de esperar, la forma de las curvas es básicamente igual a la de la figura 2. Sin embargo, ahora profundizaremos un poco más para ver numéricamente los cambios relativos en la cantidad de agua recogida al variar la velocidad desde un valor v_0 hasta otro $v_0+\Delta v$.

Por ejemplo, en el caso de la intensidad de 5 mm/h tenemos que, a una velocidad de 1 km/h se interceptan 0.074 litros. Aumentando la velocidad hasta los 5 km/h reducimos esa cantidad en un 54% hasta los 0.034 litros. Sin embargo, al aumentar de 5 a 10 km/h, solo reducimos esos 0.034 litros en un 14.7% hasta los 0.029.

Realizando estos cálculos sucesivos para las distintas intensidades obtenemos la siguiente tabla,

Tabla 2

Reducción en % de la cantidad de agua recogida a una velocidad v_0 al aumentarla hasta $v_0+\Delta v$					
	5 mm/h	**10 mm/h**	**15 mm/h**	**50 mm/h**	**100 mm/h**
De 1 a 5 km/h	54,0%	55,9%	57,0%	60,0%	61,6%
De 5 a 10 km/h	14,7%	15,9%	16,6%	18,8%	20,1%
De 10 a 15 "	5,7%	6,3%	6,6%	7,7%	8,4%
De 15 a 20 "	3,0%	3,4%	3,5%	4,2%	4,6%
De 20 a infinito	9,4%	10,4%	11,0%	13,1%	14,4%

Análisis de los resultados y conclusiones

A la vista de la tabla (2), comprobamos numéricamente la conclusión extraída anteriormente.

A velocidades muy bajas, del orden de 1 o 2 km/h, la cantidad de agua recibida por la superficie superior es muy grande, dado que empleamos mucho tiempo en recorrer la distancia L. Por esta superficie superior, aun siendo siete veces menor que la frontal, recogeríamos el doble de agua que por esta última.

El aumentar un poco la velocidad, desde 1 km/h a 5 km/h, supone disminuir la cantidad de agua interceptada a menos de la mitad en cualquier intensidad. Desde luego, este pequeño esfuerzo si que vale la pena.

Sin embargo, cuanto mayor es la velocidad, menos 'rentable' resulta un incremento Δv de velocidad. Así, de 5 a 10 km/h sólo se consiguen disminuciones del orden del 15% aproximadamente. Llegados a los 10 km/h, podríamos suponer razonablemente que esta es ya una velocidad bastante óptima. Correr a más de esta velocidad no merece mucho la pena, ya que la disminución todavía se hace más pequeña al pasar de 10 a 15 km/h, con valores inferiores al 10 %. Y de 15 a 20 km/h, del orden del 4%.

En el último caso, aumentando la velocidad desde los 20 km/h hasta un valor que tienda a infinito, conseguiríamos disminuciones entre el 9% y el 14%. Valores insignificantes dado el inmenso aumento de velocidad necesario.

Velocidad óptima V_{op} y factor de optimización k

Definición:

Se podría considerar a la velocidad óptima como aquella a la cual se recoge la cantidad mínima de agua. Pero dado que esto sólo se cumple para una velocidad infinita, no nos sirve a efectos prácticos. Por este motivo, definiremos la *velocidad óptima* V_{op}, como aquella a la cual la diferencia entre el agua recogida por un móvil y la cantidad mínima, es una fracción k de esta última. Esta definición, es equivalente a decir que la velocidad óptima se alcanza cuando la cantidad de agua recogida por la superficie superior es una fracción k de la interceptada por la superficie frontal. La evaluación de este factor k se puede realizar consensuando el objetivo del móvil en cuanto a la mojadura, con el rango de velocidad en el cual se puede mover.

De acuerdo con la definición y con la ecuación (3), de debe cumplir la siguiente igualdad,

$$\frac{LIS_2}{V_d} = kL\rho S_1$$

ésta velocidad de desplazamiento será la que consideraremos como óptima. Así, teniendo en cuenta que la velocidad media de caída de la lluvia es I/ρ, obtenemos,

$$V_{op} = \frac{R_s}{k} v_{cm} \quad \textbf{(4)}$$

dónde $R_s = \frac{S_2}{S_1}$, es la relación entre las superficies y v_{cm} es la velocidad media de caída de la lluvia, término que resolveremos a continuación. El lector puede intuir que esta velocidad será función de la intensidad de precipitación.

Velocidad terminal de las gotas de lluvia v_t

Las partículas en caída libre alcanzan una velocidad terminal v_t en el momento en que se igualan las fuerzas que actúan sobre ella. Una de ellas, es la debida al campo gravitacional terrestre $F_g=mg$, y la otra, dirigida hacia arriba, es la fuerza de resistencia ejercida por el aire que depende de la forma de la partícula y de la velocidad relativa. Por ejemplo, en el caso de que la partícula tenga forma esférica, la expresión de dicha fuerza es $F_r=6\pi R\eta v$ conocida como fórmula de Stokes, donde R es el radio de la esfera, v su velocidad y η la viscosidad del fluido.

En el caso concreto de las gotas de lluvia, (consideradas teóricamente como partículas esféricas aunque a partir de 1 mm tienen forma esferoide), nos interesa tener esa velocidad como función del diámetro D (en *mm)* para una presión estándar de 1013 hPa. Una de las expresiones más utilizadas es:

$$v_t(D)\begin{cases} 0; D \leq 0.03mm \\ 4.323(D-0.03); 0.03mm \langle D \leq 0.6mm \\ 9.65-10.3e^{(-0.6D)}; D \rangle 0.6mm \quad \text{Atlas (1973) * (Referencia bibliográf ica al final)} \end{cases}$$

Relación entre la velocidad media de caída y la intensidad.

Cuando precipita, en un volumen de atmósfera podemos encontrar gotas de muchos tamaños hasta un máximo de unos 6-7 mm aproximadamente, que es el límite físico en el cual una gota se divide en otras más pequeñas. Por este motivo, junto con lo explicado en el apartado anterior, el total de agua contenida en un volumen no cae toda a la misma velocidad. En consecuencia, introduciremos el concepto de *velocidad media de caída* v_{cm} de la lluvia, que será,

$$v_{cm} = \frac{I}{\rho} \quad \textbf{(5)}$$

Para resolver esta ecuación, necesitamos conocer la densidad *ρ,* que la averiguaremos gracias a la distribución de tamaños.

Distribución de tamaños N(D,I)

Para averiguar el valor de la densidad de lluvia, necesitamos conocer el número de gotas de cada tamaño por metro cúbico. Dado que consideramos las gotas como esferas, su volumen vendrá dado por $\frac{\pi}{6}D^3$, donde *D* es el diámetro. Así, la densidad quedará como,

$$\rho(D,I) = \frac{\pi}{6}\int_0^\infty N(D,I)D^3 dD \quad \textbf{(6)}$$

donde *N(D,I),* nos da el número de gotas por unidad de volumen, para un determinado diámetro *D* y una intensidad *I* dada.

Existen varias expresiones empíricas para *N(D,I)*, entre ellas la de **Marshall-Palmer**, que es la que utilizaremos en los cálculos al funcionar bastante bien en el rango de intensidades medias, además de que es muy usada para calcular la intensidad de precipitación a partir de los valores de reflectividad que proporcionan los radares. Esta es,

$$N(D,I) = N_0 e^{-4.1 I^{-0.21} D} \qquad \textbf{(7)}$$

Marshall-Palmer (1948) **(Referencia bibliográfica al final)*

donde un valor típico de N_0 es 8000.

Sustituyendo (7) en (6), y aplicando el resultado a la ecuación (5), obtenemos la ecuación para la velocidad media de caída de la lluvia en función de la intensidad,

$$v_{cm}(I) = \frac{I}{\frac{\pi}{6} \int_0^{\infty} 8000\, e^{-4.1 I^{-0.21} D} D^3 \, dD} \qquad \textbf{(8)}$$

Ajuste de la ecuación (8) a una función logarítmica

Dada la gran dificultad con la que nos encontramos en el manejo de la ecuación (8), nos propusimos encontrar alguna función que nos diera, sino resultados exactos, sí una buena aproximación. Esto lo conseguimos ajustando a una función logarítmica del tipo k+ln(1+Ix) con resultados sorprendentemente muy buenos, al menos para intensidades entre 5 y 100 mm/h. En este rango, el error medio absoluto es solamente del 0.7%, con una desviación máxima del 3.8% en *I=50 mm/h*. En ella, como siempre, *I* será la intensidad de precipitación y *k, x* las constantes a determinar.

Tras realizar diversos cálculos hemos hallado los siguientes valores, *k=3,156415* y *x= 0,284124.* De esta forma, y aproximando estos valores, obtenemos la nueva ecuación para la velocidad media de caída de la lluvia en función de la intensidad. Esta es,

$$v_{cm} = 3.156 + \ln(1 + (0.284)I) \qquad \textbf{(9)}$$

donde v_{cm} viene en m/s.

Sustituyendo (9) en (4), tenemos que la velocidad óptima en función de la intensidad, será,

$$V_{op} = \frac{R_s}{k}\left[3.156 + \ln(1 + (0.284)I)\right] \qquad \textbf{(10)}$$

Nota: *la distribución de Marshall-Palmer (MP), al igual que otras, sólo da buenos resultados en cierto rango de intensidad, de ahí que existan otras distribuciones para intensidades pequeñas y grandes. Esta función (9), al estar basada en la MP, estará sujeta a ciertas limitaciones. Por ejemplo: carece de límite superior al ser una función logarítmica y además su límite inferior es 3.156 m/s. Esto nos indica, que esta ecuación se debe tomar con mucha precaución a la hora de aplicarle intensidades muy pequeñas o muy grandes.*

Velocidad óptima. Caso práctico.

En el supuesto de que el móvil sea una persona, una cantidad de agua interceptada que sea un 25% superior al mínimo sería bastante razonable. Esto supone un $k=0.25$.

Recordemos la ecuación definida anteriormente para la velocidad óptima (4),

$$V_{op} = \frac{R_s}{k} v_{cm}$$

teniendo en cuenta los valores típicos para las superficies, $S_1=0.7\ m^2$ y $S_2=0.1\ m^2$

para hallar R_s, $k=0.25$ y la ecuación (9), obtenemos,

$$V_{op} = 0.5714\left[3.156 + \ln(1 + (0.284)I)\right] \qquad \textbf{(11)}$$

Con esta nueva expresión, ya podemos calcular la velocidad a la cual la cantidad total de agua interceptada será sólo un 25% superior a la cantidad mínima, en función de la intensidad. En nuestro caso, multiplicaremos el resultado por 3.6, para que nos dé la velocidad en km/h.

Daremos unos cuantos valores en la siguiente tabla,

Tabla 3

Velocidad óptima, con k=0.25, para varias intensidades					
	5 mm/h	10 mm/h	15 mm/h	50 mm/h	100 mm/h
Velocidad óptima V_{op} (km/h)	8,3	9,3	9,9	12,1	13,4

y su representación gráfica,

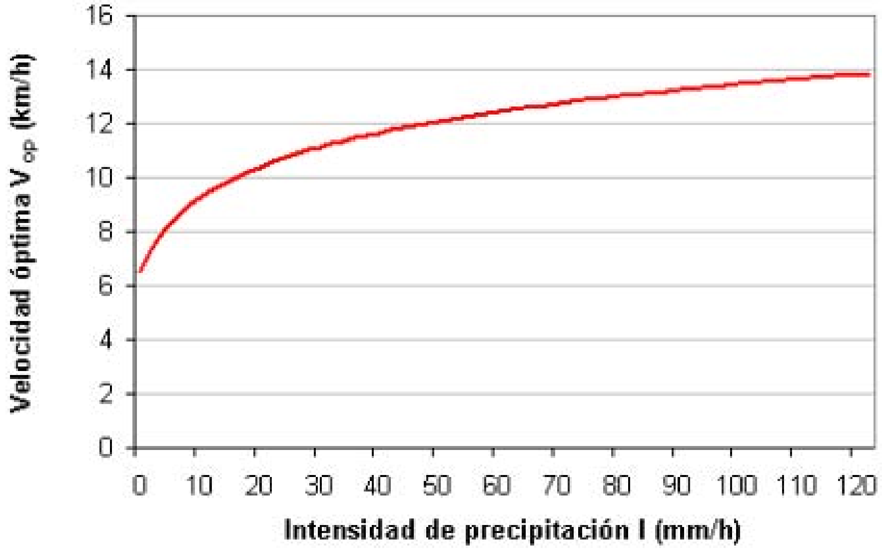

Figura 5

Representación gráfica de la ecuación (11) que da la velocidad óptima V_{op} a la cual, la cantidad de agua interceptada por una persona es sólo un 25% superior a la cantidad mínima, en función de la intensidad I.

Análisis y conclusión

Como podemos observar, a mayor intensidad, la velocidad óptima es mayor. Esto parece estar de acuerdo con nuestra reacción inmediata. Inconscientemente, bajo un intenso chubasco echamos a correr. Sin embargo, bajo una lluvia moderada, aceleramos levemente el paso e incluso en caso de lluvia débil prácticamente andamos como si no estuviera precipitando.

Ahora bien, existe un matiz, y es que en contra de lo que pudiera parecer, a doble intensidad no es necesario aumentar al doble la velocidad para obtener la misma optimización, ya que la relación entre velocidad óptima e intensidad, no es lineal. Un leve aumento sería suficiente. Aumento que disminuye conforme aumenta la intensidad.

Referencias

Atlas D., R.C. Srivastava, and R.S. Sekhon, “Doppler radar characteristics of precipitation at vertical incidence”, Rev. Geophys. 11, 1-35 (1973).

Marshall J.S. and W. Palmer, “The distribution of rain drops with size”, J. Meteorology, 5,165-166 (1948).

ram@meteored.com