Memorias y notas presentadas a la Sociedad

LAS LLUVIAS OROGRÁFICAS

APLICACIÓN A LA SIERRA DE GRAZALEMA

POR

MARIANO DOPORTO

A mi Maestro D. Francisco Cos.

§ 1. En los mapas de lluvias de la Península Ibérica, publicados en el *Anuario del Observatorio Central Meteorológico*, o en el mapa de lluvias del quinquenio 1916-1920, publicado por D. Pedro M. González Quijano en la *Revista de Obras públicas*, núm. 2.428 (1.º Mayo 1925), llama la atención, a primera vista, las grandes lluvias observadas en la provincia de Cádiz, donde hay estaciones pluviométricas (Grazalema y Villaluenga del Rosario), que registran una lluvia anual varias veces superior a la registrada en las estaciones que las rodean (Cádiz, Sanlúcar y Málaga), situadas a unos 50 kilómetros de las primeras.

Este máximo de lluvias está situado sobre una región montañosa donde el terreno sube rápidamente desde el nivel del mar a una altura de 600 metros, habiendo sierras y picos que alcanzan alturas de más de 1.000 metros (Sierra de Grazalema 1.654 metros).

Es bien conocido que la lluvia es un fenómeno meteorológico muy variable con las circunstancias locales, principalmente las del relieve del terreno, y al relieve hay que acudir para explicar, cualitativa y cuantitativamente, el máximo de lluvias de la provincia de Cádiz.

La lectura de un trabajo de Ono (1) acerca de las lluvias orográficas, trabajo en el que el autor hace un estudio completo y detallado del problema, me sugirió la idea de llegar a los mismos resultados prácticos con menor esfuerzo matemático, es decir, plantear y resolver el problema en un caso sencillo, que es el práctico, de la manera más elemental compatible con el «rigor meteorológico» —si vale la expresión—, rigor que, tratándose de precipitaciones, es muy pequeño. Para la ilustración práctica del razonamiento me ha parecido muy apropiado el máximo de lluvias de la Sierra de Grazalema, pero la escasez de estaciones pluviométricas en esta zona y el referirse las observaciones que he encontrado de gran parte de las que existen a meses completos y no a lluvias debidas al período de precipitaciones originadas por un solo ciclón, son causa de que la confirmación de la teoría no sea tan concluyente como debiera.

§ 2. Una masa de aire húmedo que por una causa cualquiera se eleva rápidamente, tan rápidamente que el aire que la rodea durante su ascensión no la calienta ni la enfría por contacto con ella, experimenta una disminución de temperatura que depende de la cantidad de vapor de agua que lleva por unidad de masa de aire seco. Cuando la elevación alcanza un cierto valor, la temperatura desciende por debajo del punto de saturación del aire húmedo y el vapor de agua comienza a condensarse en gotas, que constituyen una nube, cuya densidad aumenta cuanto más se eleva la masa de aire, que la arrastra parcialmente.

Consideremos en la atmósfera a una altura y, un prisma recto, de base, unidad y altura dy. La masa de aire que penetra por la base inferior debe ser igual a la masa de aire húmedo que sale, en igual tiempo, por la base superior, pues no hay acumulación de aire en el prisma elemental que consideramos. Es decir, que a todas las alturas, $v\rho$ debe ser constante (v = velocidad vertical del aire; ρ = densidad del aire seco). Pero la temperatura del aire que entra es superior a la

(1) *Suminosuke Ono. On orographic precipitation. Phil. Mag.* 49, 1925, pág. 144. Acerca de igual tema existe publicado otro trabajo: *Pockels, Ann. der Physik*, 4, 1901, IV, página 459, al que hace referencia Ono.

del aire que sale, y si el aire está saturado de vapor, dentro del prisma se condensará una masa de agua que podremos calcular. Sea c_y la masa de vapor de agua que satura al aire que entra en el prisma; la masa de vapor que satura el aire que sale, será: $c_y + \frac{\partial c_y}{\partial y} dy$; la diferencia $- \frac{\partial c}{\partial y} dy$, será proporcional a la masa de vapor de agua condensado.

Entre dos niveles y_0 e y_1, la masa de agua que forma la nube será:

$$W = - \int_{y_0}^{y_1} v \rho \frac{\partial c}{\partial y} dy = v \rho (c_{y_0} - c_{y_1}).$$

§ 3. Si la nube que así se forma produce precipitación, no lo hará exclusivamente sobre el lugar en que se ha formado, sino que al ser arrastrada por el viento con cierta velocidad horizontal, producirá lluvias en las regiones sobre las cuales camine. Ono (1) supone que la distribución horizontal de la lluvia en la dirección del viento que arrastra a la nube, puede representarse por una suma de funciones

$$W(x) = W_0 \Sigma_i \, q_i \, e^{-q_i (x - x_1)} \qquad [1]$$

donde: q_i, son constantes que habrá que determinar para cada región; x_1, la abscisa según la dirección del viento del punto en que se produce la condensación; x_1, el punto en que se registra la precipitación $W(x)$, y W_0, la cantidad de agua condensada en x_1.

Dada la naturaleza de estos cálculos, puede escribirse simplemente

$$W(x) = W_0 \cdot q \cdot e^{-q(x - x_1)}. \qquad [2]$$

Aunque no me ha sido posible estudiar el trabajo original en que Ono establece estas fórmulas, y, por tanto, no sé cómo llega a ellas, es lógico suponer que la [1], donde las q_i se determinan experimentalmente, puede escribirse para representar una curva cualquiera, y por ello es simplemente la expresión matemática de una curva observada. Pero la fórmula simple [2] puede deducirse haciendo la sencilla hipótesis de que «para una misma velocidad del viento e igual forma de la precipitación (lluvia, nieve o granizo, con igual tamaño y peso de gotas, copos o granizos), la precipitación en un punto es proporcional a la masa actual de la nube sobre ese punto». Si en x, la masa de agua de la nube es W, y en $x + dx$, es $W + dW$, $- dW$ será la masa de agua precipitada en el intervalo dx, masa que, según la hipótesis hecha, es igual al producto de la masa media W de la nube en el intervalo dx, por una cierta constante, q, por el intervalo dx.

$$- dW = W \cdot q \cdot dx.$$

Integrada esta ecuación se tiene:

$$lW = - qx + lc; \qquad W = ce^{-qx}; \qquad [3]$$

donde c es la constante arbitraria de la integración. La lluvia en un intervalo dx, será

$$W dx = ce^{-qx} dx.$$

Sumando las precipitaciones ocurridas en intervalos que se extienden desde x_1, lugar en que comienza la precipitación, hasta un punto infinitamente alejado, donde la precipitación es nula y la nube desaparece por haberse resuelto totalmente en lluvia, se tiene:

$$\int_{x_1}^{\infty} W dx = c \int_{x_1}^{\infty} e^{-qx} dx =$$

$$\left[- \frac{c}{q} e^{-qx} \right]_{x_1}^{\infty} = \frac{c}{q} e^{-qx_1};$$

el primer miembro de esta igualdad representa el total de lluvias, es decir, la masa W_0 de agua de la nube. De donde

$$c = W_0 \cdot q \cdot e^{qx_1}.$$

Sustituyendo este valor de c en [3], se obtiene la [2].

El valor de q puede deducirse disponiendo de observaciones de lluvias en dos estaciones, tales que la diferencia de precipitaciones en ellas sea exclusivamente debida a este efecto de dispersión del viento. Así ocurre en las estaciones pluviométricas de Grazalema y Ronda. La primera está situada al W. de la segunda, y el terreno desciende desde Grazalema a Ronda, lo que nos da la seguridad de que, en el espacio que las separa, no se produce condensación orográfica.

Si de las precipitaciones totales de Grazalema (G) y Ronda (R) restamos la precipitación media registrada en estaciones próximas situadas al nivel del mar o a una altitud muy pequeña (Cádiz, Puerto de Santa María), obtendremos las precipitaciones debidas al relieve (G' y R') en Grazalema y Ronda.

Tendremos por tanto

$$G' = W_0 q e^{-qx_G}$$

$$R' = W_0 q e^{-qx_R}$$

(1) *Loco citato* y *Journ. of Met. Soc. of Japan*, 1923, página 127.

que divididas dan:

$$\frac{G'}{R'} = e^{-q(x_R - x_G)}$$

y tomando logaritmos

$$\log_{10}\frac{G'}{R'} = -q\,(x_R - x_G)\log_{10} e \qquad [4]$$

$x_R - x_G$ es la distancia entre ambas estaciones, es decir, 18 kilómetros.

En el cuadro siguiente (tabla I) están consignadas las precipitaciones registradas durante diversas épocas en las citadas estaciones del Servicio Meteorológico Español y los valores de q, calculados mediante la fórmula [**4**], que de ellas se deducen.

TABLA I

ÉPOCAS	Cádiz.	Puerto de Santa María.	Media. M	Grazalema G	Ronda. R	G' = G — M	R' = R — M	q
Enero 1921.....	13,8	7,8	10,8	54,5	14,4	33,7	3,6	0,124
Octubre 1921.....	14,9	58,0	36,4	95,0	48,0	58,6	11,6	0,090
Noviembre 1921.....	59,4	52,9	56,1	129,5	72,9	73,4	16,8	0,082
Marzo 1922	74,3	77,4	75,8	410,8	106,4	335,0	30,6	0,132
Mayo 1922.	5,9	7,7	6,8	36,8	14,0	30,0	7,2	0,080

De los dos años (1921 y 1922) de observaciones simultáneas en Grazalema y Ronda, sólo sirven para la determinación de q los meses consignados. Esto se debe a que no disponiendo más que de la lluvia mensual en Ronda, no es posible separar la lluvia debida exclusivamente al efecto dispersivo del viento W. de la lluvia orográfica debida a vientos del E. En los meses Enero 1921 y Marzo 1922 , el valor de q es bastante elevado, y la causa es, probablemente, la citada, que aumenta considerablemente la precipitación sobre Grazalema. Por otra parte, las lluvias con viento S. o N., estas últimas menos frecuentes, causarán, en términos generales, igual precipitación sobre Grazalema y Ronda, como se deduce teniendo en cuenta el relieve de las provincias de Cádiz y Málaga; y, por tanto, el valor de q que se deduzca para los meses en que hay lluvias con vientos S. o N. será más pequeño que el verdadero. En la imposibilidad de obtener más elementos de juicio para deducir el valor de q, adoptaré el valor medio de los consignados en la tabla: $\mathbf{q = 0{,}102}$. Los valores obtenidos por Ono (1) para el Japón son 0,076 y 0,092, cuya media, 0,084, es inferior al valor aquí obtenido. Debe tenerse en cuenta que los valores de Ono se refieren a precipitación en forma de nieve, mientras que en nuestro caso la precipitación es predominantemente en forma de lluvia, y la lluvia será dispersada menos que la nieve por el viento; es decir, q, debe ser menor para la nieve que para la lluvia.

§ 4. La lluvia orográfica, en un punto de abscisa x_1, lluvia producida al deslizarse el viento por la superficie del terreno, que aumenta su altitud sobre el nivel del mar será, por tanto, la suma de los valores de $v\rho\,(c_{y_0} - c_{y_1})$ para todos los puntos anteriores, multiplicados por los valores correspondientes de

$$q \cdot e^{-q(x - x_1)},$$

suma cuya expresión es

$$W(x) = \int_0^x \rho\, q\, v\, (c_{y_0} - c_{y_1})\, e^{-q(x - x_1)}\, dx_1 \qquad [5]$$

Para efectuar la suma indicada por el signo integral, necesitamos conocer la velocidad vertical, v, del viento en función de la abscisa x.

Supongamos una corriente aérea de velocidad horizontal, u, que circula sobre un terreno llano o sobre el mar; al encontrar en su camino un obstáculo, un macizo montañoso, por ejemplo, se ve obligada a remontarle, y su velocidad u, horizontal, deja de serlo; podemos suponer, con suficiente aproximación, que continúa con igual velocidad lineal, adaptándose a la línea general

(1) *Phil. Mag., 49*, 1925, 162.

del relieve del suelo. Como puede verse en la figura 1.ª, que representa un corte del terreno en

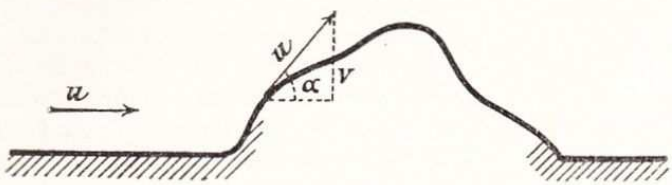

Figura 1.ª

la dirección del viento, la velocidad vertical v del viento será

$$v = u \cdot \operatorname{sen} \alpha = u \frac{f'}{(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

siendo $y = f(x)$ la función que representa el relieve del terreno. El caso más sencillo será aquel en que el relieve pueda representarse por una función lineal

$$y = a\,x + b$$

o una serie de funciones lineales, válida cada una para un intervalo conocido de las abscisas, pues entonces el valor de v es constante:

$$v = u \frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}};$$

todo ello supuesto que u, la velocidad horizontal del viento, no varía de un punto a otro, lo que es muy aproximado cuando se trata de lugares cuyas distancias son del orden del centenar de kilómetros.

Por igual razón puede considerarse ρ como una constante, y c dependiente de x por intermedio de las alturas; es decir, constante en toda la región para una altura determinada, pero variable de unas alturas a otras.

La variación de c con y, suponiendo que el gradiente vertical de temperaturas es el adiabático del aire saturado, está representada aproximadamente por una recta (fig. 2.ª) obtenida (1) para la unidad de masa de aire seco que se eleva a partir del nivel del mar, donde tiene una temperatura de 15° c. y está sometida a la presión de 1013 mbs.

La ecuación de dicha recta es

$$c = -2 \cdot 13\,y + 10 \cdot 75$$

donde $y = f(x)$ es el relieve del terreno. Cuando pueda escribirse

$$y = a\,x + b,$$

será

$$c = -2 \cdot 13\,a\,x + 10 \cdot 75 - 2 \cdot 13 \cdot b = A\,x + B_1$$

La diferencia $c_{y_0} - c_{y_1}$ que figura en [**5**], es la diferencia entre las masas de vapor de agua que saturan la unidad de masa de aire seco al nivel del suelo, que es variable de un punto a otro, y a un nivel y_1 constante en toda la zona. Por tanto, será

$$c_{y_0} - c_{y_1} = A\,x + B_1 - c_{y_1} = A\,x + B,$$

haciendo $B = B_1 - c_{y_1} = 10 \cdot 75 - 2 \cdot 13\,b - c_{y_1}$.

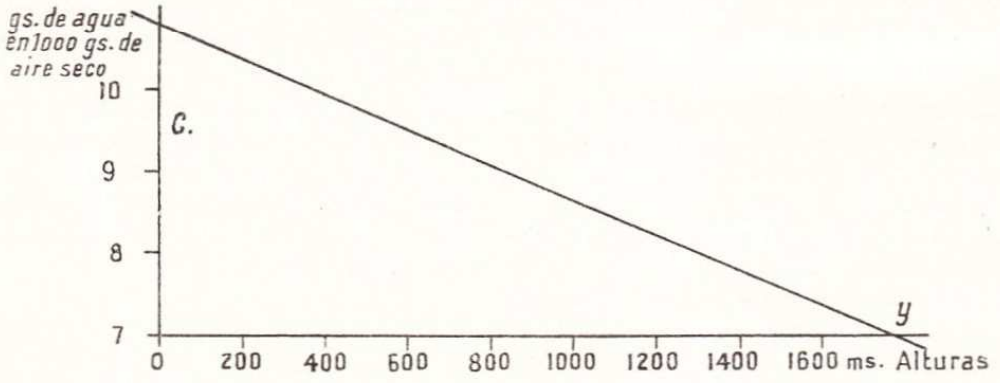

Figura 2.ª

§ 5. Sustituyendo en la [**5**] los valores de v, c_{y_0} y c_{y_1}, se tiene:

$$w(x) = \rho \cdot u \cdot \frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{x'}^{x} q \cdot (A\,x_1 + B)\, e^{-q\,(x - x_1)}\, d\,x_1$$

(para $x' \leq x \leq x''$).

(1) El cálculo se ha hecho con los valores consignados en *Dictionary of Applied Physics*, vol. III, *Meteorology*, página 76.

Los límites x' y x'' de la x en que es válida esta fórmula, son los del intervalo, en el cual el perfil del terreno puede ser representado por la ecuación $y = a\,x + b$.

Haciendo la integración indicada se obtiene

$$w(x) = \rho \cdot u \frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}} [A(x-1) + B - e^{q-(x-x)}(A(x'-1)+B)] \quad (x' \leq x \leq x'' \quad [6]$$

fórmula que da la lluvia orográfica en un punto de abscisa x, del intervalo (x', x'').

Si a partir de x'', el perfil del terreno puede representarse por la ecuación

$$y = a'\,x + b',$$

válida hasta que sea $x = x'''$, la lluvia en un punto x, tal que sea $x'' \leq x \leq x'''$, será debida al aumento de precipitación causado por el relieve y a la lluvia dispersada por el viento debida a la condensación producida en el intervalo (x', x''). Su expresión será

$$w(x) = \rho u \frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{x''}^{x} q(A x_1 + B) e^{-q(x-x_1)} dx_1 +$$

$$\rho u \frac{a'}{(1+a'^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{x''}^{x} q \cdot (A' x_1 + B') e^{-q(x-x_1)} dx_1$$

$$w(x) = w(x'') e^{-q(x-x')} + u\rho \frac{a'}{(1+a'^2)^{\frac{1}{2}}} [A'(x-1) + B' - e^{-q(x-x')}(A'(x''-1)+B')]. (x'' \leq x \leq x.)$$

Y así sucesivamente.

Conviene observar, además, que estas fórmulas se aplican sólo a aquellos intervalos en los cuales la pendiente es ascendente, en el sentido en que sopla el viento u, es decir, intervalos para los que se verifica que el coeficiente angular de la recta

$$y = a\,x + b,$$

que representa el perfil del suelo, es positivo, $a > o$. Para aquellos intervalos en los cuales es $a \leq o$, las fórmulas [6] y [7] no son aplicables. Donde es $a = o$ (terreno llano), la lluvia orográfica es sólo debida al efecto de dispersión del viento y estará representada por el primer término del segundo miembro de [7]. Donde sea $a < o$ (terreno en descenso), el viento desciende y el efecto del relieve es contrario al que estudiamos, pues en vez de condensarse vapor de agua por el enfriamiento del aire que asciende, se evaporará la nube debido al calentamiento del aire que disminuye de altura.

En el ejemplo que sigue de aplicación de estos cálculos he considerado las regiones donde era $a < o$ (terreno en descenso) como si fuera $a = o$ (terreno llano), prescindiendo de calcu-

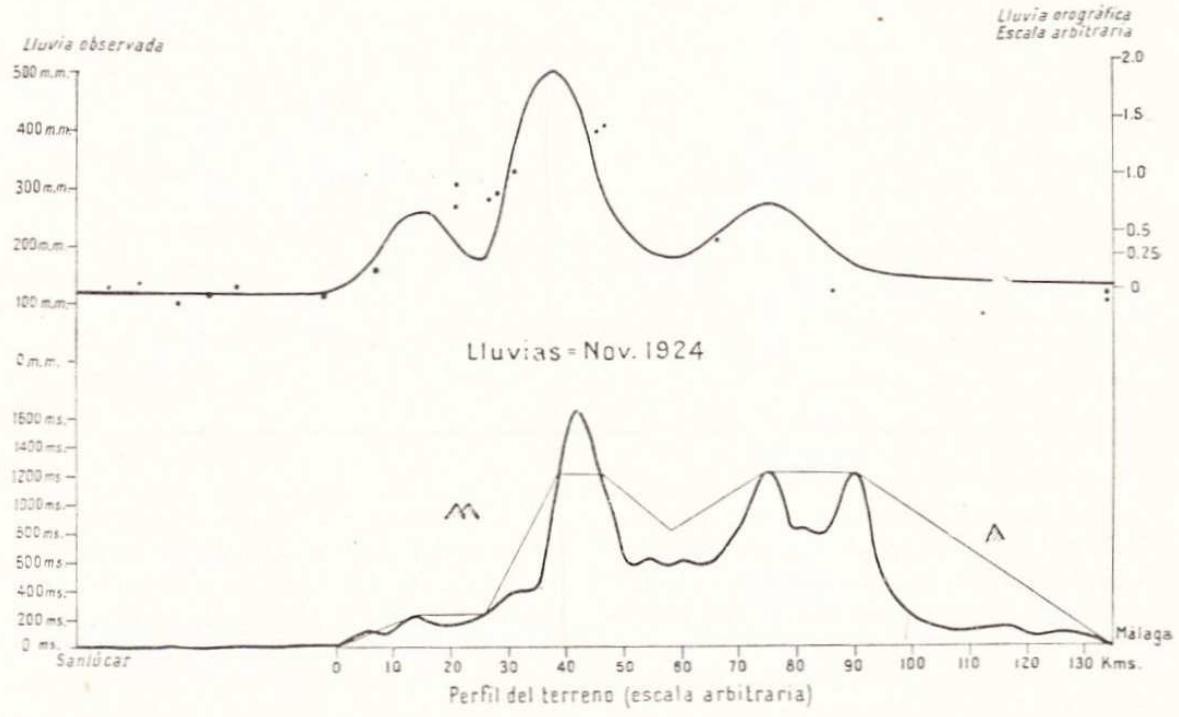

Figura 3.ª

lar la evaporación debida al descenso del aire por el pequeño número de datos de observación que poseo. Sin embargo, la consideración hecha bastará para explicar que sea mayor la altura de lluvia calculada que la observada en las estaciones de San Pedro Alcántara, Faro Calaburras y Málaga.

§ 6. En la figura 3.ª está representado un corte del suelo según la recta que une Sanlúcar de Barrameda con Málaga, recta que pasa por el pico de Grazalema, de 1.654 metros de altura, y otros dos picos, de 1.200 metros, cuyo nombre desconozco. He obtenido este perfil valiéndome del mapa de España, 1 : 500.000, publicado recientemente por el Instituto Geográfico y Catastral. La línea quebrada de la misma figura indica la línea de flujo del aire. He prescindido de los accidentes del terreno cuya extensión superficial es pequeña; por ejemplo: la línea de flujo trunca el pico de Grazalema y salva la depresión del terreno entre los dos picos de 1.200 metros. El primer caso está justificado, porque siendo de poca superficie la base del pico de Grazalema, la corriente de aire se partirá, rodeándole, influyendo aquél muy poco en la lluvia orográfica; y el segundo caso también es aceptable, debido a que en aquella *hoya* el aire que la llena, permanecerá casi estacionario.

En la tabla II se consignan las ecuaciones $y = ax + b$, de los segmentos de rectas que constituyen la línea de flujo del aire, los valores del coeficiente $\frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}$ y los intervalos en que son válidos.

La unidad de longitud es el kilómetro. Los valores señalados con * son valores adoptados para simplificar el cálculo.

Las nubes producidas por la perturbación que en la marcha horizontal del viento ejerce la Sierra de Grazalema no se resuelven todas en lluvia. Podemos aceptar que sólo la masa de agua condensada por debajo de los 3.000 metros es la que después constituye la precipitación que observamos. El valor de c_{y_1} correspondiente a $y_1 = 3.000$ metros es 4,36. En la tabla II se hallan también los valores de A y $B = B_1 - c_{y_1}$ correspondientes a cada intervalo.

Con estos valores de las constantes y las fórmulas que se deducen de la [**7**], sustituyendo las x', x'' por los valores extremos de un intervalo, y haciendo la x igual al extremo del intervalo siguiente, he calculado la tabla III, que contiene la cantidad de precipitación orográfica, por unidad de superficie y unidad de tiempo, en los puntos cuyas abscisas se indican.

TABLA II

Intervalo.	Ecuación.	$\frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}$	A	B
$0 < x < 15$	$y = 0{,}016\,x$	0,016	— 0,034	6,39
$15 < x < 26$	$y = 0$	0,000	—	—
$26 < x < 38$	$y = 0{,}080\,x - 1{,}840$	0,078	— 0,167	10,31'
$38 < x < 46$	$y = 0$	0,000	—	—
$46 < x < 58$	$y = -mx + n$	0,0 *	—	—
$58 < x < 75$	$y = 0{,}023\,x - 0{,}534$	0,023	— 0,049	7,45
$75 < x < 90$	$y = 0$	0,000	—	—
$90 < x < 134$	$y = -m'x + n$	0,0 *	—	—

§ 7. En la figura 3.ª están indicadas por puntos las lluvias observadas en Noviembre de 1924 por los encargados de las estaciones meteorológicas del Servicio Meteorológico Español, y por una línea continua la lluvia orográfica, calculada como he dicho. Las escalas de ambos dibujos están indicadas en la misma figura; la de la lluvia orográfica es arbitraria, y su cero co-

rresponde a 120 mm. de lluvia observada, que es, aproximadamente, la altura media de lluvias que se habría registrado si el terreno fuera llano y estuviera al nivel del mar.

La tabla IV contiene los nombres de las estaciones utilizadas en los cálculos y en la comprobación gráfica; las distancias en kilómetros desde sus proyecciones sobre la línea del perfil de la figura 3.ª a Sanlúcar de Barrameda, y las lluvias registradas en Enero y Marzo de 1917 y Noviembre de 1924. La lluvia que figura en Ronda para 1924 ha sido calculada determinando el coeficiente de proporcionalidad entre las lluvias de Ronda, Grazalema y Málaga (Instituto) en 1921 y 1922.

TABLA III

X = abscisas.	$W(x)$: precipitación por unidad de superficie y de tiempo.
0	0
15	0,072
26	0,024
38	0,190
46	0,088
58	0,026
75	0,073
90	0,017
134	0,001

TABLA IV

ESTACIONES	ALTITUD EN METROS	DISTANCIAS EN KMS.	ENERO 1917	MARZO 1917	NOVIEMBRE 1924
Cádiz	10	5	134,9	89,9	—
La Jardilla	?	72	—	—	267,8
Monte Breña	220	43	157,2	58,6	111,6
Conil	10	25	128,9	117,4	—
Chipiona	7	— 6	80,7	54,6	—
Grazalema	1.100	92	463,3	458,4	405,2
Pantano Guadalcacín	70	52	171,8	199,2	158,2
Hernán Martín	736	66	267,0	150,0	266,0
Jerez (Gas)	28	23	98,5	85,3	—
Colonia Caulina	20	28	—	—	129,0
Jerez (Granja)	63	23	122,9	123,4	115,8
Monte Algaida	5	6	—	—	128,4
Montifarte	500	73	225,2	182,4	274,0
Puerto de Santa María (Dunas)	1	18	130,9	97,5	99,5
Puerto de Santa María	4	11	157,5	124,2	138,8
Quegigal	465	80	289,3	281,3	—
Rota	25	0	93,4	62,4	—
Villaluenga del Rosario	+ de 800	90	—	—	394,0
Sanlúcar	6	0	114,8	104,2	—
Tempul	190	66	225,0	228,0	304,0
Trebujena	20	16	125,2	111,2	—
El Robledal	326	76	265,0	291,4	320,8
San Pedro Alcántara	410	131	110,0	185,0	118,5
Marbella	6	131	92,9	112,6	—
Faro Calaburras	19	157	79,8	130,6	77,4
Campanillas	85	167	97,4	—	—
Málaga (Instituto)	42	179	59,6	135,5	114,9
Málaga (Observatorio)	42	179	51,1	118,0	99,9
Mijas	500 ?	159	—	—	214,0
Ronda	730	111	—	—	204,0

Se ve fácilmente que a la lluvia con viento W. del mes de Marzo de 1917 se han sumado lluvias con viento E., hasta el punto de que para este mes podría hacerse un cálculo análogo, cambiando el sentido de la abscisa *x*.

Estas observaciones se refieren a estaciones situadas en una faja de terreno de unos 30 kilómetros de ancho que se extiende hacia la parte S. de la recta que une Sanlúcar y Málaga. En la figura 3.ª están indicadas también las cumbres más altas de esta zona. Los valores anormales de las estaciones Hernán Martín (736 ms. de altitud), Tempul (190 ? ms.) y Mijas (500 ? ms.) quedan elocuentemente explicados por la misma figura.

***

Debo gratitud al Meteorólogo D. Francisco del Junco, que me ha aconsejado eficazmente en algún punto de este trabajo.

Febrero, 1927.