

**LA INESTABILIDAD EN LA
INTERFASE DE DOS
FLUIDOS. DOS CASOS
PARTICULARES:
KELVIN-HELMHOLTZ Y
RAYLEIGH-TAYLOR**

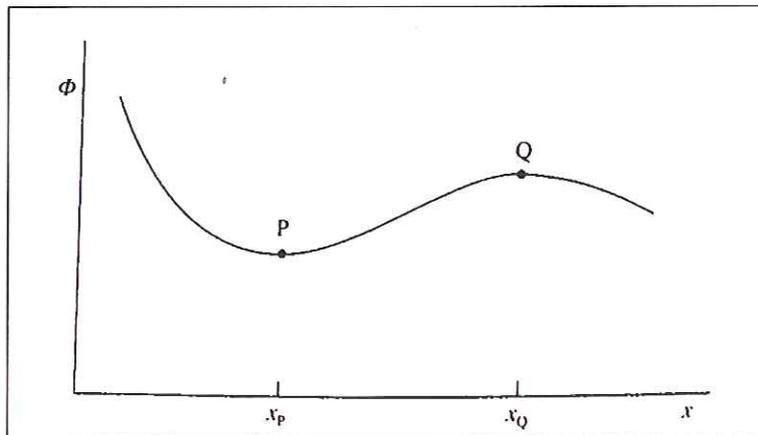
David López-Rey Lumbreras
AÑO 2005

**LA INESTABILIDAD EN LA INTERFASE DE DOS
FLUIDOS. DOS CASOS PARTICULARES:
KELVIN-HELMHOLTZ Y RAYLEIGH-TAYLOR**

PUNTO DE PARTIDA: Tipos de estabilidad mecánica.-

Es conocido por todos los científicos (físicos, químicos, matemáticos, ingenieros...) que existen dos tipos fundamentales de equilibrio en un sistema: estable e inestable.

Supongamos el simple caso de una partícula de masa m que puede moverse en una dirección bajo un determinado potencial ϕ que tenga una forma como la que sigue:



Existen dos tipos fundamentales de equilibrio mecánico: estable (punto P) e inestable (punto Q).

Si la partícula no experimenta ningún tipo de fuerza, ésta puede permanecer en los puntos P o Q indefinidamente, a pesar que en estos puntos el potencial ϕ sufra un mínimo o un máximo, respectivamente. Sin embargo, por poco que se le desplace de P o de Q, habrá movimientos a consecuencia de este desplazamiento.

Clásicamente, si la partícula se localizaba en la punto P, ésta comenzará a sufrir un movimiento de vaivén alrededor de su punto de partida original, dando lugar a lo que los físicos denominan un “movimiento armónico” que puede ser descrito (de forma más o menos compleja) a través de funciones trigonométricas del tipo seno (o coseno, pues todo depende una constante inicial que no repercute desde el punto de vista físico en el movimiento). Decimos, entonces, que la partícula está en un *equilibrio estable*, ya que, para desplazamientos pequeños, la oscilación de la partícula está centrada de su origen de partida. Estos casos están asociados a mínimos de potencial.

Sin embargo, ese mismo desplazamiento en el punto Q tiene consecuencias distintas. Tras sufrir un pequeño “empujón”, nuestra partícula sufre un movimiento de aceleración en la dirección derecha o

izquierda (según el sentido de la fuerza), sin tener porqué volver a su punto inicial. Se trata, entonces, de un *equilibrio inestable* mucho más complejo desde el punto de vista matemático que su anterior, necesitando, entonces, numerosas aproximaciones con el fin de ser estudiado y, a veces, ni aún así, el investigador es capaz de hacerlo.

Estamos, entonces, con las dos caras de una misma moneda. Por un lado, está el caso de equilibrio estable en el que es relativamente fácil formular una teoría de movimiento; mientras que en el caso antagónico sólo es posible su estudio gracias a los grandes avances de los programas informáticos.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.-

Volvamos a la partícula localizada en el punto P. En este lugar vamos a suponer que actúa una fuerza (el “empujón que decíamos antes”) cuyo valor es $\partial\phi/\partial x$ de valor pequeño que nos va a permitir desarrollarlo en serie de Taylor para los pequeños desplazamientos $\xi_P = x - x_P$:

$$\phi \approx \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P (x - x_P) + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_P (x - x_P)^2 + \dots$$

El primer de la derecha no tiene ninguna relevancia física, puesto que es una constante relacionada con el origen de potenciales (recuérdese que sólo se nos está permitido medir diferencias de potencial y no “potenciales absolutos”), con lo cual podemos despreciarlo con total tranquilidad. El segundo de ellos es nulo ya que nos estamos centrando en un mínimo y, ahí, la primera derivada es nula siempre. Por lo tanto, sólo nos sobrevive el tercer término que ya es no nulo. Entonces, la fuerza la podemos expresar:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_P \xi_P \quad [\text{E1}]$$

y que la podemos introducir en la Ley Fundamental de la Dinámica (Segunda Ley de Newton):

$$m \frac{\partial^2 \xi_P}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_P \xi_P \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2 \xi_P}{\partial t^2} + \left(m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_P \xi_P = 0$$

Estamos entonces ante una ecuación diferencial de segundo orden cuyo paréntesis de la segunda ecuación nos aporta el valor del cuadrado de la frecuencia de oscilación del movimiento de un equilibrio estable de la partícula entorno a un mínimo de potencial:

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$$

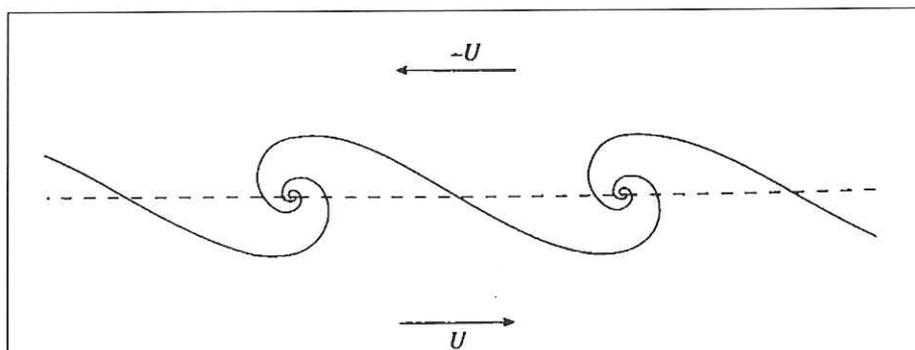
Una ecuación similar a [E1] se obtiene para el caso de una partícula esté localizada en el máximo Q. En este caso, también el primer término de [E1] se puede eliminar (vuelve a ser un problema de origen de potencial), al igual que el término asociado a la primera derivada (puesto que en los máximo de la función, la primera derivada siempre es cero). Sin embargo, la solución tiene derroteros distintos al caso anterior. ¿Causa?: que los valores de la segunda derivada son ahora negativos en los alrededores de Q, lo que se traduce que el valor de ω pertenece al campo de los complejos y, a consecuencia, las soluciones son funciones exponenciales que “disparan” sus efectos a lo largo del tiempo.

LA INESTABILIDAD DE KELVIN-HELMHOLTZ

PRELIMINARES.-

La inestabilidad en la interfase de dos fluidos horizontales y paralelos con diferentes densidades y velocidades, con el que es más denso en la parte inferior, es llamada “inestabilidad de Kelvin-Helmholtz”. Este nombre es comúnmente usado para designar cualquier tipo de inestabilidad donde las variaciones de velocidad y de densidad son continuas y que ocurren en una fina capa de separación.

Para el presente trabajo, se ha creado un modelo próximo a lo que ocurre en la realidad. Partiremos de dos fluidos no viscosos, inmiscibles y horizontales que se mueven en la misma dirección y sentido pero con velocidades distintas. Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de la interfase, es decir, de la zona infinitesimal que separa ambos fluidos y, a partir de ahí, intentar explicar este tipo de inestabilidad.



La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz surge en la interfase de dos fluidos no miscibles con velocidades de desplazamiento distintas

FUNDAMENTO TEÓRICO.-

Consideremos dos fluidos de densidades distintas, ρ (el más denso) y ρ' (el más ligero), inmiscibles, no viscosos, con profundidades h (para el denso) y h' (para el ligero) y que se mueven en los mismos dirección y sentido y con distintas velocidades v_1 y v_2 .

Tomemos como origen de coordenadas la propia superficie horizontal que limitan ambos fluidos en estado de reposo, al desplazamiento vertical se le asignará la coordenada z , mientras que la x estará situada en el eje de propagación de la onda. Por tanto, $z=0$ será la interfase de los fluidos en reposo.

Nos vamos a centrar, de ahora en adelante, de la propagación de la onda que se forma en la interfase para pequeños desplazamientos verticales (en otras palabras, que la amplitud es despreciable respecto a las profundidades), así la onda se puede expresar como:

$$\eta = a \sin(kx - \omega t) .$$

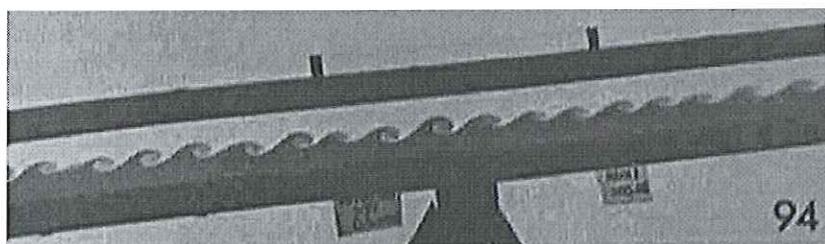
donde: a es la amplitud de la onda.

k es el número de onda.

ω es la frecuencia angular de la onda.

La onda avanzará en la dirección del eje X con una velocidad $C = \frac{\omega}{k}$.

Pero antes, hay que contar con el beneplácito del teorema de circulación de Kelvin (1869). Éste afirma que “la circulación alrededor de cualquier curva material cerrada es invariante en un fluido no viscoso”.



Experimento de laboratorio para el estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

El enunciado anterior tiene importantes consecuencias en la teoría de fluidos. Una de estas secuelas es que para cualquier fluido incompresible no viscoso de densidad constante sobre el que actúa una fuerza de volumen por unidad de masa puede describirse como gradiente de una función escalar univalente en la posición (esto lo

conseguiremos, como veremos más adelante, gracias a la ecuación de Laplace).

Y por otro lado, el teorema de circulación de Kelvin asegura que los elementos materiales de un fluido uniforme puestos en movimiento desde el reposo permanecen sin rotación a menos que se muevan en una región donde las fuerzas viscosas sean importantes, característica ésta última que cumplimos en nuestras hipótesis de partida en las que decíamos que los fluidos a considerar eran no viscosos.

Así, apoyándonos en lo expuesto más arriba, estamos capacitados para calcular un potencial de velocidad ϕ que satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \qquad \nabla^2 \phi_2 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\phi_1 = v_1 x + \varphi_1 \qquad \phi_2 = v_2 x + \varphi_2$$

de tipo lineal, lo que quiere decir que se trata de dos movimientos rectilíneos y uniformes descritos por rectas cuyas pendientes son las velocidades de ambos fluidos.

Los valores de φ_1 y de φ_2 se pueden determinar usando, por segunda vez, la ecuación de Laplace con dos restricciones importantes que se anulen para distancias grandes respecto a la interfase, en lenguaje matemático:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 \rightarrow 0 & \text{cuando} & z \rightarrow \infty \\ \varphi_2 \rightarrow 0 & \text{cuando} & z \rightarrow -\infty \end{array}$$

Haciendo operaciones, se llega a los siguientes potenciales de velocidad:

$$\text{para el más denso: } \phi = (v_1 - c) \left[x + \frac{a \cosh k(z+h) \cos kx}{\sinh(kh)} \right]$$

$$\text{para el más ligero: } \phi' = (v_2 - c) \left[x - \frac{a \cosh k(z-h') \cos kx}{\sinh(kh')} \right]$$

Teniendo, pues, los potenciales de velocidad, es fácil llegar a estimar la propia velocidad de cada fluido. En nuestro caso, se ha concluido que son:

$$\text{para el más denso: } V_1^2 = (v_1 - c)^2 \left[1 - 2ka \coth k(z+h) \operatorname{sen} kx \right]$$

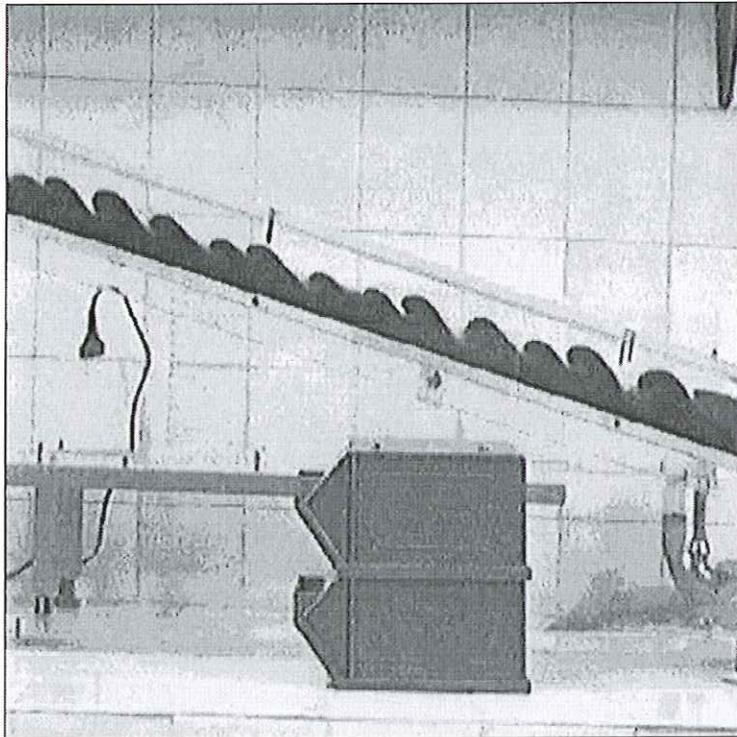
para la interfase: $V_0^2 = V_1^2 = (v_1 - c)^2 [1 - 2ka \coth(kh) \text{sen} kx]$]

para el más ligero: $V_2^2 = (v_2 - c)^2 [1 + 2ka \coth(kh') \text{sen} kx]$]

Una condición de contorno importante en el desarrollo de este estudio, es que la presión debe ser una función continua (despreciando los efectos de la tensión superficial) en las inmediaciones del fluido, lo que quiere decir que $p_1 = p_2$ en $z = 0$. Bajo estas condiciones, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli para ambos fluidos:

para el más denso: $p + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g \eta = cte$

para el más ligero: $p' + \frac{1}{2} \rho' V_2^2 + \rho' g \eta = cte$



Experimento de laboratorio para el estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Imponiendo, además, que la presión no sufre variaciones importantes en la interfase (realmente, hay diferencias de presión a ambos lados de la frontera de los fluidos; para más detalle, léase el apartado “Una aproximación errónea”) y que el desplazamiento de ésta viene dado por la función de onda sinusoidal, las ecuaciones de Bernoulli antes expuestas toman la siguiente forma:

$$\rho' V_2^2 - \rho V_1^2 + g \eta (\rho' - \rho) = cte$$

Sustituyendo en la ecuación anterior los valores de V_1^2 , V_2^2 y de η , los coeficientes variables $\text{sen}(kx)$ se cancelan, quedando la siguiente expresión:

$$k\rho(V-c)^2 \coth kh + k\rho'(V-c)^2 \coth kh' = g(\rho - \rho')$$

se trata de la relación de dispersión de la onda en el plano de la interfase. Recuérdese que la relación de dispersión es una expresión matemática que relaciona la frecuencia y la longitud de onda de una onda. En este caso, la relación de dispersión depende de c (velocidad de la onda) y, según sus valores, así obtendremos diversas soluciones con distinto significado físico.

Para que exista propagación de la onda, es necesario que el valor de c sea real. En el caso que fuese negativo, la solución tendría involucradas funciones exponenciales crecientes en el tiempo lo que físicamente querría decir que si modificamos ligeramente la interfase la configuración de la perturbación es inestable.

Si suponemos que la profundidad de ambos líquidos es grande respecto al grosor de la interfase, la relación de dispersión sufre una simplificación importante, ya que los términos de la cotangente hiperbólica tienden a la unidad cuando la variable aumenta: $\coth(kh) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 1$.

$$k\rho(v_1 - c)^2 + k\rho'(v_2 - c)^2 = g(\rho - \rho')$$

que nos permite despejar el valor de la velocidad de la onda, c :

$$c = \frac{\rho'V_2 + \rho V_1}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{k(\rho + \rho')} - \frac{\rho\rho'}{(\rho + \rho')^2}(V_2 - V_1)^2}$$

El valor de la velocidad puede ser real o complejo, dependiendo de las distintas condiciones del problema. Discernir qué efectos físicos surgen a raíz de los distintos resultados de c , es nuestro próximo objetivo.

EL PUNTO CLAVE: EL NÚMERO DE RICHARDSON.-

Se puede demostrar que el criterio de inestabilidad viene dado si el número de Richardson es menor que 0.25, es decir, si

$$Ri = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gH}{\rho_1(U_1 - U_2)^2} < \frac{1}{4}$$

Es importante tener en cuenta que la teoría nos garantiza la estabilidad siempre que $Ri > 1/4$ en todos los puntos del flujo, pero el caso que se

cumpla que $Ri < 1/4$ en algún punto (o incluso en todos) del fluido, será únicamente una condición necesaria pero no suficiente para la inestabilidad. Sin embargo, para la mayoría de los fluidos geofísicos y de laboratorio, el criterio $Ri < 1/4$ será correcto para la predicción de la inestabilidad.

UNA ECUACIÓN, DISTINTAS SOLUCIONES.-

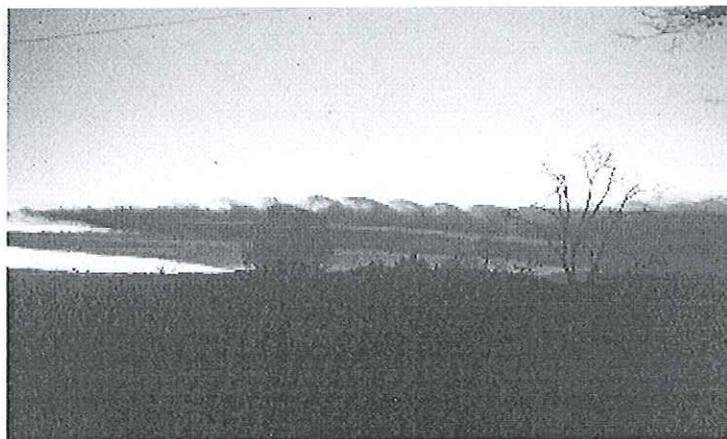
Para que la expresión que nos determina la velocidad de la onda tenga solución real, el término de la raíz cuadrada deber mayor o igual a cero. En este caso, se trata de fluidos estables siempre y cuando el segundo término de la raíz sea menor (o igual) que el primero.

Sin embargo, pudiera ocurrir que el segundo término de la raíz sea mayor que el primero:

$$g(\rho - \rho') < k\rho\rho'(V_1 - V_2)^2$$

lo cual es bastante fácil, pues hemos supuesto que el fluido denso tiene densidad ρ' y el ligero ρ , con lo cual el primer término de la desigualdad es negativo, mientras que la parte derecha es siempre positivo gracias al cuadrado de la diferencia de las velocidades y a que los factores del producto son positivos. Así pues, la inestabilidad está garantizada.

Pero la ecuación de la velocidad de la onda nos permite estudiar distintos casos, tan interesantes como el anterior. Veamos algunos de ellos.



La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz ha sido observada numerosas veces en nubes estratiformes.

CASO 1. $V_1 = V_2 = 0$ y $\rho = 0$.-

Corresponde a dos fluidos quietos respecto el uno del otro (a parte del movimiento de la onda en la interfase) y, además, el fluido ligero tiene una densidad muy baja, tanto que se puede despreciar. Un ejemplo de este tipo de situación se produce entre el mar y el aire, ambos en calma. Entonces, la relación de dispersión es:

$$c = \pm \sqrt{\frac{g}{k}}$$

El valor del signo – indica que la onda se propaga en la dirección negativa de las x . Pero la importancia de este caso reside en que ambas soluciones de la relación de dispersión son reales, lo que quiere decir físicamente que es posible la formación de pequeñas ondas de escasa amplitud con cualquier velocidad. Además son soluciones constantes, que no evolucionan con el tiempo, por lo que ambos fluidos están en una configuración estable.

CASO 2. $V_1 \neq V_2$ y $\rho = \rho'$.-

Ahora hemos supuesto una discontinuidad en la velocidad. La expresión matemática de la velocidad de onda para este caso es:

$$c = \frac{1}{2} [(V_2 + V_1) \pm i(V_2 - V_1)]$$

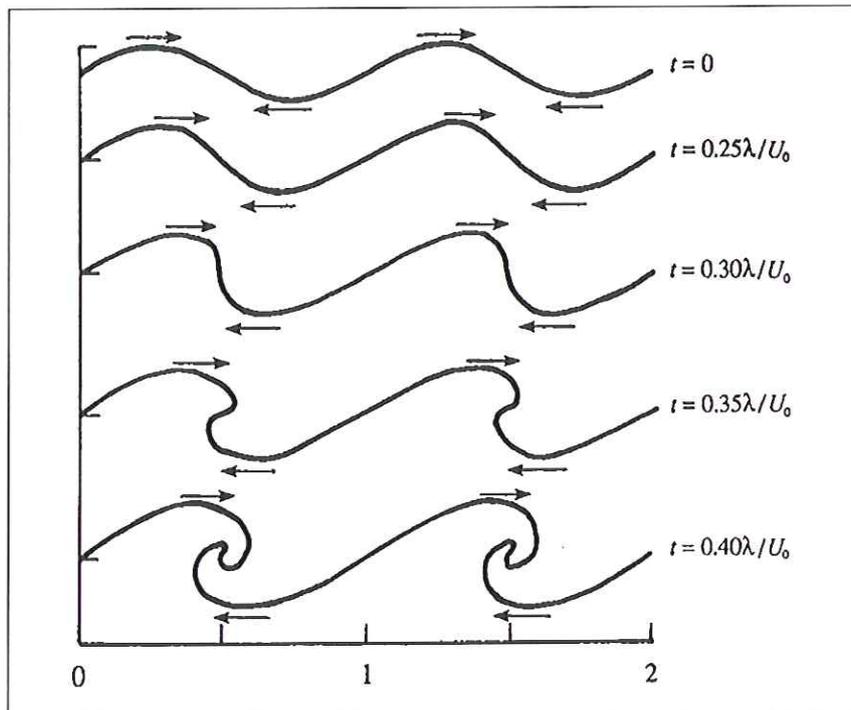
exceptuando el caso en que ambas velocidades son iguales. Aparece ahora un término imaginario en la velocidad de onda cuyas consecuencias físicas son que irá en aumento según avance el tiempo (recuérdese que el término imaginario se puede expresar matemáticamente en forma de exponenciales), lo que produce una configuración inestable.

Un caso conocido por todos nosotros de esta situación son las banderas que ondean al viento. Se puede considerar que el aire está separado por una fina capa (la bandera), que, debido al rozamiento, frena ligeramente una capa del aire. El movimiento es, por tanto, inestable y un ligero desplazamiento de las banderas produce que su agitación aumente con el tiempo.

CASO 3. $V_1 = V_2 = 0$ y $\rho \neq \rho'$.-

Ambos fluidos están en reposo y sus densidades son distintas. La relación de dispersión de la interfase adopta la siguiente forma:

$$c = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}}$$



Desarrollo temporal de la inestabilidad de KH para distintos tiempos en función de la longitud de onda y la velocidad.

Nuevamente hay que discernir con el valor de la diferencia de densidades que aparece en la raíz. Sin embargo, no hay problemas ya que según nuestra nomenclatura $\rho' < \rho$, por lo que el radicando siempre será positivo, lo que se traducirán en una velocidad de onda real y una configuración estable de ambos fluidos.

Pudiera ocurrir que el fluido más denso estuviera encima del más ligero. Aquí entonces el radicando sería negativo y el valor de la velocidad de onda imaginario. En otras palabras, daría lugar a una configuración inestable. Bajo este supuesto se cimienta la inestabilidad de Rayleigh-Taylor que se trata en la otra parte del presente trabajo.

CASO 4. PEQUEÑAS PROFUNDIDADES.-

Hasta ahora, hemos estado suponiendo que los espesores de ambas capas de fluidos son enormes, tanto que los términos de cotangente hiperbólica que aparecían en nuestra primitiva relación de dispersión, pudieron ser despreciados al tender éstos a la unidad.

Sin embargo, en estos instantes nos preocupa el caso de que el grosor de una de las capas sea pequeño en comparación con el otro, de tal forma que los términos trigonométricos hiperbólicos no sean despreciables. La velocidad de onda en la interfase viene establecida por:

$$c = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{tgh}(kh) [1 - \sigma(1 + \operatorname{tgh}(kh))]}$$

siendo σ la gravedad específica del fluido de gran espesor.

Un caso de este tipo es el que se forma en la superficie de los charcos de agua. En este caso, la gravedad específica del aire tiene un valor muy bajo: $\sigma \approx 1.3 \times 10^{-3}$. Lo que la expresión matemática viene a indicar que el aire tiende a disminuir la velocidad de onda.

UNA APROXIMACIÓN ERRÓNEA.-

Cuando estábamos desarrollando el trabajo teórico de nuestro modelo de inestabilidad, se impuso que la continuidad de la presión en ambos lados de la interfase, de tal forma que la variable física no sufriera cambios importantes para poder aplicar así, la ecuación de Bernoulli y generar los resultados expuestos. Se trata, como se dijo entonces, de una aproximación pues realmente la presión sufre cambios, pequeños, pero los sufre al fin y al cabo.

La ondulación en la interfase de los fluidos genera diferencias de presión: defectos en la parte cóncava y excesos en la parte convexa. De esta manera, la estabilidad no es posible y el gradiente de presión produce un aumento de la inestabilidad. Más concretamente, el fluido es incapaz de soportar la discontinuidad de la presión y, comienzan entonces, los torbellinos característicos de estas situaciones. Además, hay que añadir que entre los máximos y los mínimos de la interfase aparecen aceleraciones en sentido opuesto que amplifican la inestabilidad.

LA ENERGÍA EN LA INESTABILIDAD DE KH.-

El origen de la energía en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KH) deriva de la energía cinética de los fluidos; por tanto, debemos encontrar una expresión que nos determine el comportamiento de la velocidad en el seno del fluido.

Podemos suponer que la velocidad inicial de la capa inferior es cero, mientras que el de la superior se mueve con velocidad V_1 . El perfil de velocidades en las capas de los fluidos que se encuentra es le siguiente:

$$V(z) = V_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2h} \right)$$

La variación de la energía cinética será la diferencia que haya entre z y $z=0$:

$$E(\text{inicial}) = \frac{1}{2} \rho h V_1^2$$

$$E(\text{final}) = \frac{1}{2} \rho \int_h^h V^2(z) dz = \frac{1}{3} \rho h V_1^2$$

La energía cinética del fluido, por tanto, decrece.



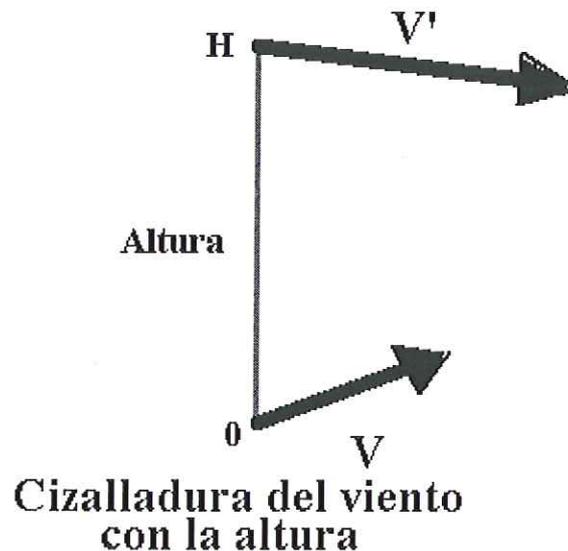
Otro ejemplo de la inestabilidad de KH en nubes, esta vez en cirroestratos

INESTABILIDAD DE KH: aplicaciones a la Meteorología.-

Un fluido, como es la atmósfera, se caracteriza por sus propiedades dinámicas, térmicas y cinemáticas a las que están sometidas las partículas que lo forman. En los fluidos se emplean dos conceptos muy importantes como son la inestabilidad y la cizalladura. Estos no son mensurables mediante aparatos, como lo pueden ser, por ejemplo, la temperatura o la presión.

La cizalladura en un fluido representa una magnitud que mide o cuantifica la variación de la velocidad de las partículas del fluido con la distancia. Esto es, si pasamos de un punto con una velocidad $V(x,y,z)$ a otro con una velocidad diferente $V'(x,y,z)$ decimos que existe una cizalladura de la velocidad: a mayor variación de la velocidad con el espacio, decimos que existe mayor cizalladura. Así, cuando nos elevamos en la atmósfera y nos encontramos que la velocidad aumenta o disminuye, tendremos que existe cizalladura vertical y esta se incrementa o decrecienta, respectivamente, con la altura. Esta variación de la velocidad con la altura se puede deber a que o la

intensidad o el módulo del viento varíe o que lo haga en la dirección. La cizalladura horizontal se tiene sin más que al analizar las variaciones del viento en la horizontal.



Obsérvese que la cizalladura existe siempre que la velocidad de las partículas del fluido varíe con la intensidad o la dirección de la velocidad o ambas a la vez.

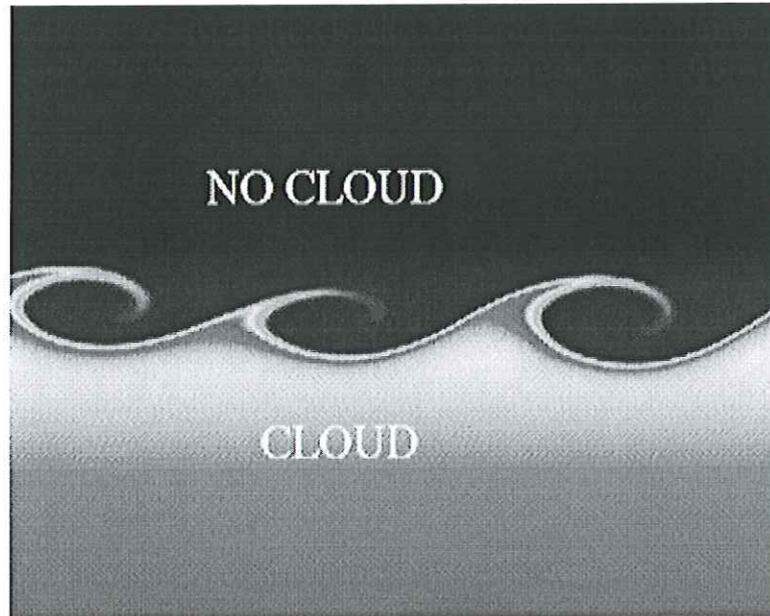
La variación del viento con la distancia, o la existencia de cizalladura, tiende a generar giros o rotaciones en los fluidos. Este hecho se puede cuantificar mediante una magnitud teórica y muy útil en Dinámica de Fluidos: la vorticidad. Es una propiedad teórica porque la vorticidad no se puede medir con un aparato, como se hace con la temperatura, aunque es una característica intrínseca del fluido.

La presencia de vorticidad en un fluido es sinónimo de la existencia de rotaciones ciclónicas o anticiclónicas, o lo que es lo mismo, de la existencia de cizalladura en él. Lógicamente, flujos uniformes donde la velocidad y dirección de viento son constantes no poseen cizalladura.

La inestabilidad KH, y particularizando nos en la atmósfera, nace como consecuencia de la existencia de cizalladura del viento con la altura y, como hemos visto a lo largo de todo el trabajo, con la presencia de dos fluidos diferente o iguales tales que el menos denso se encuentra encima del más denso. En estas condiciones existe estabilidad estática atmosférica. En ausencia de viento, la capa o interfase separadora entre los dos fluidos de distinta densidad permanecería plana o sin alteraciones.

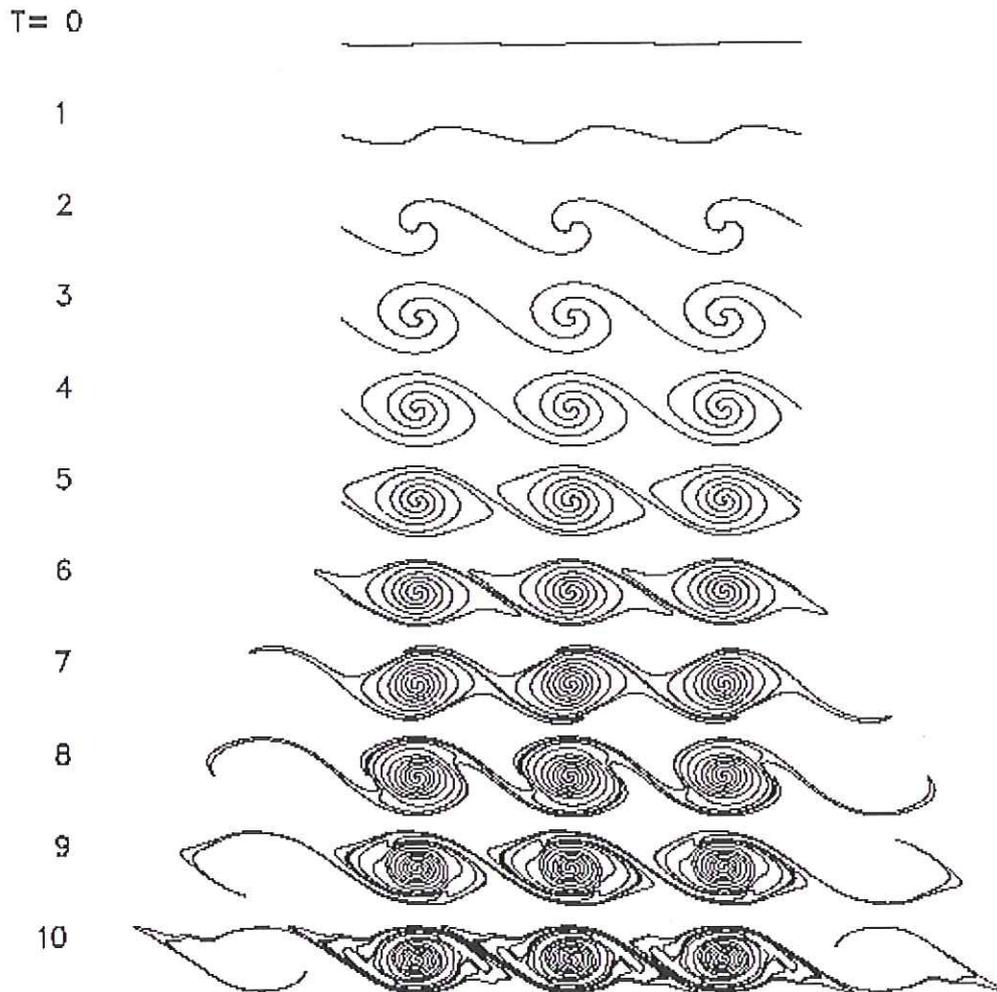
Si la intensidad del viento aumenta en la capa superior entonces se producen un conjunto de ondas estables en la superficie de separación. Si la intensidad o cizalladura del viento sigue aumentando, entonces las pequeñas ondas entran en un modo inestable y comienzan a crecer a

medida que pasa el tiempo dando lugar a formas que nada tiene que ver con las ondas iniciales. La superficie separadora comienza a ondularse, a retorcerse sobre si misma a medida que crece hasta dar unas formas características, llamadas de “ojos de gato”.



Ondas de KH generadas en simulaciones de laboratorio, para un instante dado. Inicialmente, la parte inferior podría ser una zona nubosa limitada por una inversión y la superior una zona sin nubes. Al cabo del tiempo se ha manifestado la presencia de inestabilidad de KH cuando la cizalladura del viento es apropiada.

Si la estabilidad entre los dos fluidos es muy grande y la cizalladura vertical es pequeña, entonces las ondas tienden a manifestarse en su modo estable. Si la estabilidad disminuye y la cizalladura aumenta, existirá un momento en que las ondas pasan a un modo de crecimiento inestable, dando lugar a los fenómenos asociados a la inestabilidad de KH.



Evolución conceptual y temporal de la zona de separación de dos fluidos donde se generan inestabilidad de KH. Obsérvese al final las formas tan peculiares llamadas “ojos de buey o de gato”

Podemos resumir que las condiciones ideales para generar inestabilidad de KH en la atmósfera son:

- Presencia de dos capas en condiciones de estabilidad, la capa superior debe ser más estable que la inferior.
- Presencia de una zona frontera bien definida entre ambas capas donde exista cierta cizalladura vertical del viento.

Las condiciones anteriormente enumeradas pueden dar lugar a fenómenos atmosféricos que vayan acompañados por o sin nubes.

Manifestaciones en la troposfera de la inestabilidad de KH: Nubes y Turbulencia en Aire Claro, TAC.-

Este tipo de inestabilidad tiene varias manifestaciones en la atmósfera, a cualquier nivel, siempre que se den las dos condiciones básicas comentadas con anterioridad. Si existe suficiente humedad en alguna de las capas puestas en juego, se generan nubes muy particulares que aparecen en forma de espiral en la vertical. Estas denotan la presencia de una importante zona de cizalladura atmosférica que son muy útiles para los pilotos. Estos tratarán de evitarlas pues en su seno se generan turbulencias no deseables para el confort de los vuelos.



Manifestación de inestabilidad de KH en nubes

Si no se generan nubes, su detección se hace muy difícil y aparecen las típicas zonas de turbulencia en aire claro, fruto de la cizalladura inmersa en ellas.

Los microfrentes de rachas asociados a la convección son otros lugares donde se pueden generar inestabilidad de KH: el aire frío, denso y descendente originado por la convección se expande en superficie con vientos fuertes, haciendo que el aire más cálido y “lento” quede por encima de él.

Las formas asociadas y generadas a la inestabilidad de KH han sido utilizadas comercialmente y para usos decorativos: barras cilíndricas transparentes y huecas, llenas de dos líquidos viscosos y que son sometidos a vaivenes continuos y suaves.



Imagen donde se observan formas nubosas onduladas asociadas a la inestabilidad de KH

Pero este tipo de inestabilidad no sólo se da en la Tierra, sino también en otros planetas. Recientemente, la misión Cassini (mandada en 2004) envió fotografías de la atmósfera de Saturno en las que se puede ver este curioso fenómeno.



Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en el planeta Saturno fotografiada en 2004 por la onda Cassini.

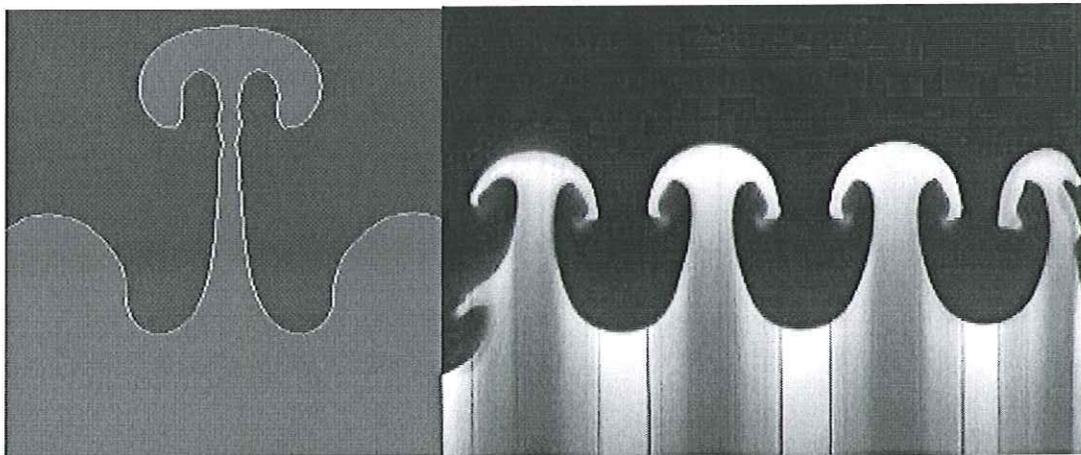
La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz puede ocurrir en los plasmas siempre que exista un movimiento de cizalladura a través de la interfase entre ambos medios. La interacción del viento solar con la magnetosfera terrestre presenta un ejemplo notable de esta inestabilidad. Allí la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz tiene un papel importante en la magnetopausa y puede producir una intensificación del arrastre de la magnetosfera por el viento solar.

LA INESTABILIDAD DE RAYLEIGH-TAYLOR

PRELIMINARES.-

La inestabilidad de Rayleigh-Taylor surge cuando en un recipiente que contiene dos fluidos separados por una interfase (uno de los fluidos debe ser líquido) se invierte de forma repentina por lo que el fluido denso está encima del más ligero. La energía potencial del sistema que al principio estaba en un mínimo (recuérdese que los equilibrios estables estaban asociados íntimamente con mínimos de potencial), está ahora en un máximo. Se produce, por tanto, un “reajuste” energético en la interfase dando lugar a este tipo de inestabilidad.

Conviene dejar claro de un principio que no hay efectos de convección, es decir que no calentamos el fluido denso (disminuimos así su densidad) y se deposita con el que tiene encima de él. Este tipo de fenómenos, relacionado con el mecanismo interno de las tormentas, por ejemplo, no tiene nada que ver con la inestabilidad de Rayleigh-Taylor pese a que sus efectos se parezcan.



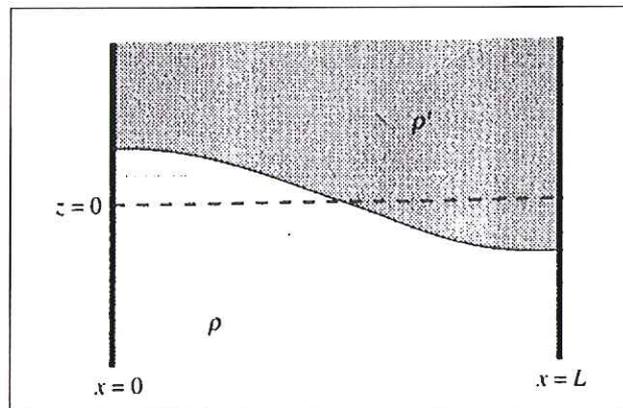
*Soluciones teóricas e idealizadas
de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor.*

FUNDAMENTO TEÓRICO.-

Como se comentó al principio del trabajo, toda perturbación en la superficie de un fluido se puede expresar en términos de una serie de Fourier con términos reales (en el caso de equilibrios estables) o complejos (equilibrios inestables). De forma matemática, cualquier desplazamiento se puede expresar:

$$\xi = \xi_k(t)e^{ik\vec{r}}$$

que indica que se puede expresar como una suma de productos de funciones dependientes del tiempo por funciones trigonométricas. El vector r está dirigido en la dirección Z , en la vertical, siendo el valor $z=0$ el correspondiente a la interfase no perturbada.



Modelo teórico para la inestabilidad de Rayleigh-Taylor.

Sin entrar demasiado en ello, la disminución de energía potencial asociada a una onda de este caso viene dada por la siguiente ecuación.

$$\frac{1}{4}(\rho' - \rho)g\xi_k^2$$

donde ρ y ρ' son las densidades de los fluidos denso y ligero, respectivamente. El incremento de energía libre en la superficie es:

$$\sigma \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \approx \frac{1}{4} \sigma k^2 \xi_k^2$$

desarrollada hasta segundo orden. σ es la tensión superficial de la interfase. Para desplazamientos pequeños, es posible expresar lo anterior en función de un único vector de onda k_c , quedando entonces:

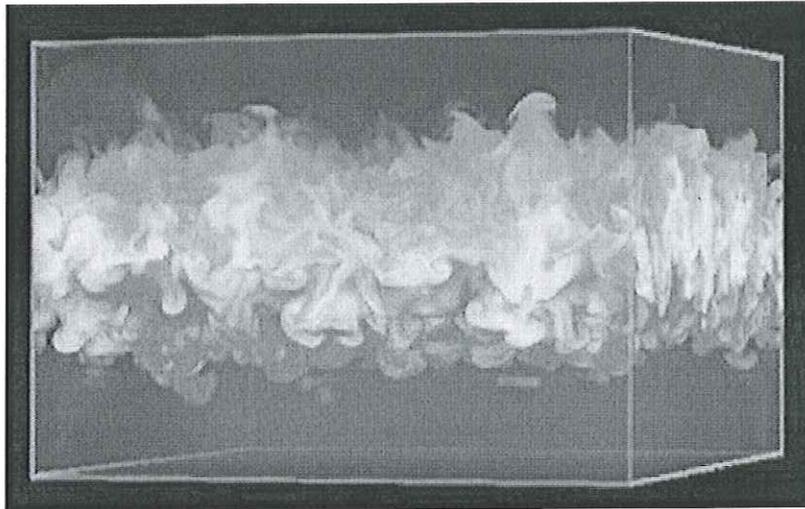
$$(\rho' - \rho)g = \sigma k_c^2$$

La energía cinética, por otro lado, depende de la velocidad y, por ello, de $(\partial \xi_k / \partial t)^2$. Como, despreciando efectos disipativos, la energía total debe permanecer constante, esto nos permite igualar la derivada temporal de la energía total a cero y así conseguimos cancelar el término cinético $(\partial \xi_k / \partial t)$ y pasar a una ecuación lineal (de mejor tratamiento matemático) que sólo depende de ξ_k y de $\partial^2 \xi_k / \partial t^2$ lo que nos dará, al igual que hicimos en el caso de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, la relación de dispersión para la interfase:

$$\omega_k^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} gk + \frac{\sigma k^3}{\rho + \rho'}$$

En el caso de equilibrio estable (el fluido ligero está por encima del denso) el valor de la diferencia de densidades se mantiene positivo, lo que viene a indicar que la frecuencia de la onda en la interfase tendrá un valor determinado y la oscilación se podrá expresar en términos trigonométricos.

Ahora bien, invirtiendo la situación (el fluido denso está sobre el ligero) el contraste de densidad es negativo. Esto acarrea que el cuadrado de la frecuencia sea negativo y su ella misma tenga valores del campo complejo. Como consecuencia de ello, el movimiento de la interfase está gobernado por funciones exponenciales que “aceleran” los efectos inestables de la nueva situación.



Simulación por ordenador de la inestabilidad de RT en la internase del fluido denso (azul) y el ligero (rojo)

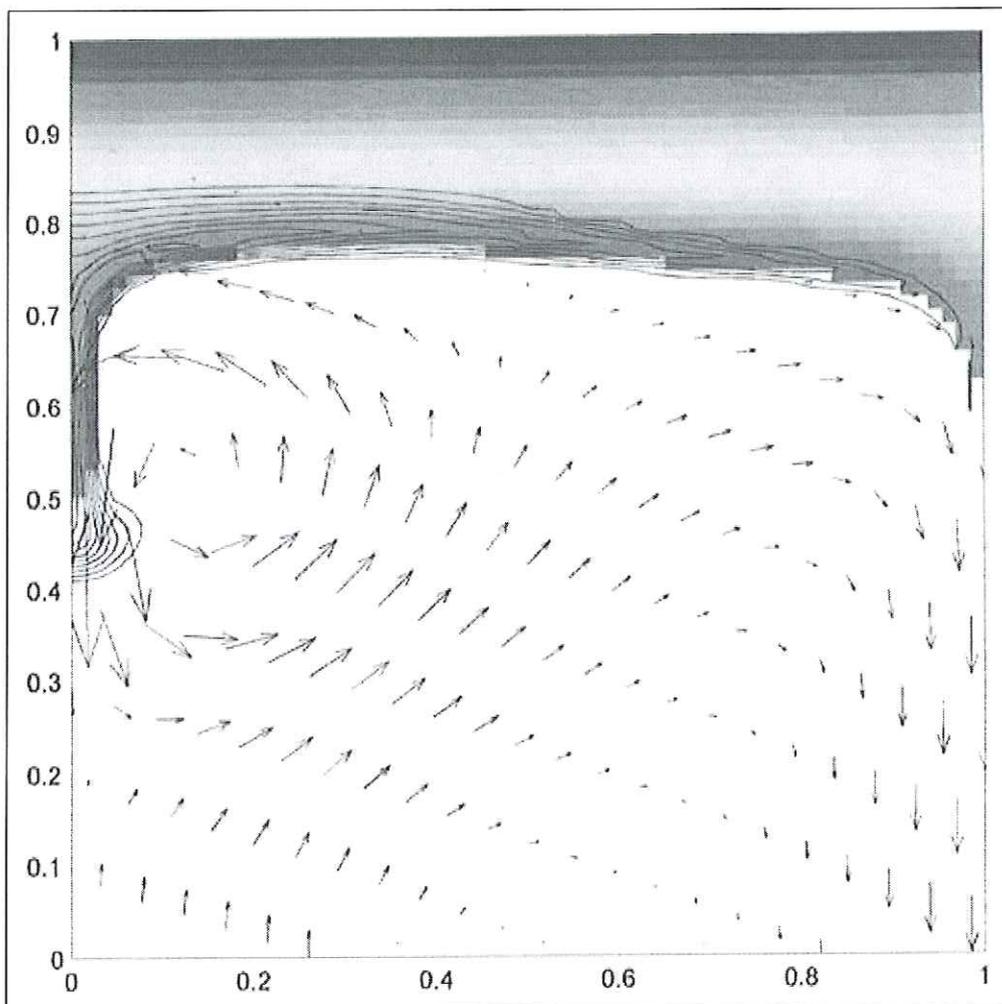
INESTABILIDAD DE RT: aplicaciones a la Geofísica.-

Existen algunos modelos de las capas más superficiales del manto terrestre que emplean aproximaciones de fenómenos adiabáticos para explicar ciertos comportamientos de la astenosfera. Realmente, esto no es del todo cierto puesto que la dinámica de los fluidos está gobernada, en parte, por fenómenos convectivos.

Como se mencionó al principio del comentario de este tipo de inestabilidad, los fenómenos convectivos dan lugar a situaciones que se parecen mucho a la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, máxime cuando los fluidos que entran en juego no se pueden expandir como es el caso. No así en el caso de la génesis de “tormentas de verano”, en las que las corrientes de aire de la superficie son caldeadas por el suelo adyacente en situaciones de fuerte insolación y se ven obligadas a ascender originándose así una expansión y, por consiguiente, disminuciones de densidad y de temperatura.

De todas formas, considerar que el sistema geofísico interno de la Tierra es adiabático no es del todo descabellado en escalas de tiempo geológico (millones de años) o en procesos muy lentos.

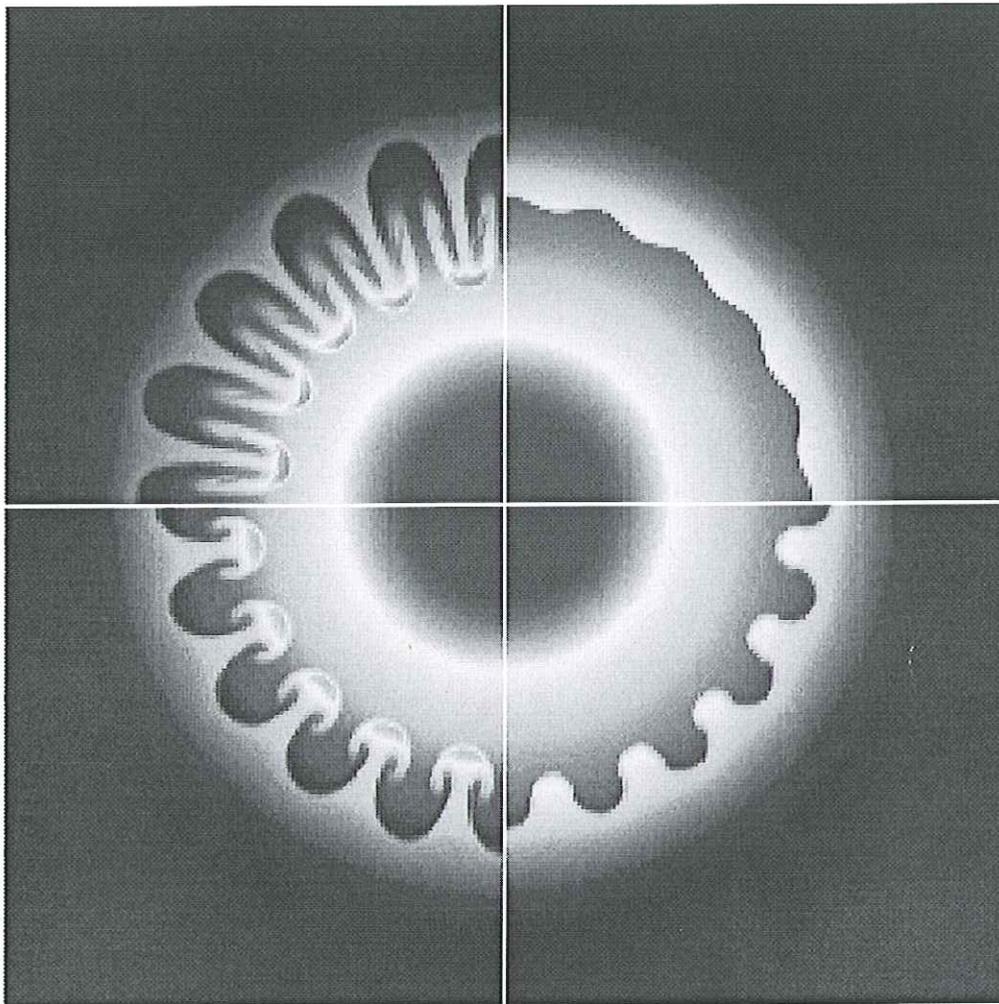
Así, en fenómenos relacionados con la astenosfera, no es descabellado pensar que ésta se tiende a descender hacia capas inferiores por efectos de conducción. Las células convectivas del manto forman una “cúpula” debido al gradiente térmico horizontal que gobierna en estas zonas favoreciendo así una mezcla adiabática. Por tanto, en las proximidades de la parcela de astenosfera obligada a descender se cumple con bastante realismo la inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Véase siguiente figura.



Inestabilidad de Rayleigh-Taylor sirve para explicar el movimiento del magma en las proximidades de la astenosfera.

También en la magnetosfera se producen sucesos de escasa cizalla en las líneas magnéticas que parecen que están regidos por la inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Así, tras calcular las aceleraciones que sufre la magnetopausa a consecuencia del viento solar, se ha encontrado que habitualmente la cizalladura magnética en la magnetopausa es suficiente para estabilizar procesos convectivos que se forman en ella, pero que si el viento solar está dirigido hacia el Polo Norte terrestre, esta inestabilidad tiende a generarse. La magnetopausa diurna puede desarrollar la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, si el ángulo de cizalladura entre los campos magnéticos interplanetario y geomagnético es inferior a los 30° .

También, los modelos geofísicos y astrofísicos que emplean potenciales gravitatorios centrales tienen en consideración este tipo de perturbaciones, como muestra la siguiente figura.



Numerosos modelos de estructuras internas de estrellas tienen en cuenta la inestabilidad de RT en sus aproximaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- BATCHELOR, G.K. "Introducción a la Dinámica de fluidos" Instituto Nacional de Meteorología. Madrid, 1997.
- CHANDRASEKHAR, S. "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability". Dover Publications Inc. Nueva York, 1961.
- COTTON, William y ANTHES, Richard. "Storm and clouds dynamics". Academic Press. Londres, 1989.
- DIEMINGER, W. "The upper atmosphere. Data Analysis and Interpretation" Springer-Verlag Berlín, Heidelberg, 1996.
- FABER, T.E. "Fluid Dynamics for Physicists" Cambridge University Press. Cambridge, 1995.
- JANSÁ GUARDIOLA, José María "Tratado de Meteorología Teórica" Tomo II, 3ª parte "Dinámica". Instituto Nacional de Meteorología. Madrid, 1960.
- KUNDU, Pijush K. "Fluid Mechanics". Academic Press, INC. Toronto.
- LINDZEN, Richard S. "Dynamics in atmospheric physics" Cambridge University Press. Cambridge, 1990
- PRUPPACHER, Hans R y KLETT, James D. "Microphysics of clouds and precipitation" Reidel Publishing Company. Londres, 1980.
- TRITTON, D.J. "Physical Fluid Dynamics". Oxford Science Publications. Oxford, 1988.
- TURNER, J.S. "Buoyancy Effects in Fluids". Cambridge University Press, 1973.
- VVAA. "La inestabilidad de Kelvin Helmholtz". Artículo publicado en "Revista del Aficionado a la Meteorología" "RAM", número 3, septiembre de 2003.

En Internet:

<http://www.enseeiht.fr/hmf/travaux/CD0001/travaux/optmfn/gpfmho/00-01/grp6/pa05.htm>

http://www.cita.utoronto.ca/~armitage/gallery/kelvin_helmholtz.html



